PARTITIONEN MIT DIFFERENZENBEDINGUNGEN

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
HEINZ GÖLLNITZ
aus Chemnitz

Göttingen 1963

1964

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544311_0060

PARTITIONEN MIT DIFFERENZENBEDINGUNGEN

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von Heinz Göllnitz

aus Chemnitz

Göttingen 1963

R. SMIT.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

D 7

Referent: Prof. Dr. M. Deuring

Korreferenten: Prof. Dr. W. Tollmien
Prof. Dr. J. Grauert

Tag der mündlichen Prüfung: 15.5.1964

I N H A L T

Einleitung

§ 1 Elementare Zerfällungsfunktionen, arithmetische Ergänzung, Konvergenzfragen

§ 2 Kombinatorische Methoden. verallgemeinerte Partitionsfunktionen

§3 Arithmetische Erweiterung, Verallgemeinerungen

§4 Zusammenfassung

Literaturangabe

Einleitung

Die additive Zahlentheorie ist die Lehre von den Zerfällungen einer gegebenen Zahl in bestimmte Summanden. Bei Vorgabe eines Systems $A(a_i)$, aus dem die Summanden stammen, wird nach der Möglichkeit gefragt, eine beliebige, natürliche Zahl n aus den Elementen des Systems darzustellen.

$$n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots$$

In der additiven Zahlentheorie sind die Untersuchungen im wesentlichen an ganz spezielle Zahlenmengen geknüpft. Unter dem Namen Waring'sches Problem ist die Frage der Darstellbarkeit einer natürlichen Zahl aus l-ten Potenzen von natürlichen Zahlen bekannt geworden. Weitere Spezialisierungen der Mengen sind möglich, indem an die Glieder Teilbarkeitsforderungen gestellt werden. Das Studium des Aufbaues einer natürlichen Zahl aus Primzahlpotenzen ist mit dem Namen Goldbach verbunden. Auf diese klassischen Probleme stützt sich die neuere Entwicklung der additiven Zahlentheorie, die den Dichtebegriff für allgemeine Mengen natürlicher Zahlen eingeführt hat (Schnirelmann). Die Lehre von den einfachen Partitionen beschäftigt sich mit Zerfällungen einer natürlichen Zahl n in Summanden aus der natürlichen Zahlenfolge, also Zerfällungen in erste Potenzen von natürlichen Zahlen mit Differenzenbedingungen. Dabei werden von der Reihenfolge unabhängige Zerlegungen betrachtet.

Zur Erläuterung werden einige Beispiele angegeben. Zerlegungen von Zahlen in verschiedene Summanden der natürlichen Zahlenfolge sollen untersucht werden, das heißt also, Zerfällungen, bei denen zwei in der Summe aufeinanderfolgende Zahlen die Mindestdifferenz eins besitzen. Zusätzlich sind an die Summanden der Zerfällungen elementare Teilbarkeitsforderungen gestellt. Ein Beispiel dafür sind Zerlegungen einer Zahl n in Summanden, deren Mindestdifferenz zwei beträgt und die keine aufeinanderfolgende ungeraden Zahlen besitzen. Allgemeiner ausgedrückt werden Summanden aus gewissen Restklassen betrachtet, die in den Zerfällungen im einzelnen näher beschriebene Bedingungen erfüllen.

Zur Vereinfachung der Ausdrucksweise sei erlaubt, die in der Summe aufeinanderfolgenden Zahlen kurz mit Nachbarn zu bezeichnen, Unter der Aufeinanderfolge zweier Zahlen aus der Restklasse ($a = q \cdot m + r$; $r<m$, r fest und $q = 0,1,2,\ldots$) werden die Zahlen $(\ldots + qm+r+(q+1)m+r+\ldots)$ verstanden. Die Teilbarkeitsforderungen bestehen dann darin, daß die Summanden in den Zerfällungen aus bestimmten Restklassen herrühren und für aufeinanderfolgende Summanden aus Restklassen bestimmte Differenzenbedingungen erfüllt werden müssen.

Einleitend wird eine kurze, zusammenfassende Übersicht der bedeutendsten Ergebnisse für Partitionen mit Differenzenbedingungen gegeben. Diese werden nach ihrer historischen Reihenfolge zusammengestellt. Daran anschließend werden neue zahlentheoretische Resultate auf dem Gebiete der Partitionen hergeleitet. Die Zusammenhänge von Zerfällungsproblemen werden mit den Mitteln der Arithmetik und Kombinatorik bewiesen.

Die Entwicklung der Partitionen setzt mit der Frage nach der Anzahl Zerfällungen der natürlichen Zahl n in Summanden aus der natürlichen Zahlenfolge ein. Die Anzahlfunktion wird seit Euler mit $p(n)$ bezeichnet. Sie kann als Anzahl der Lösungen der endlichen, diophantischen Gleichung in natürlichen Zahlen x_k gedeutet werden

$$n = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + \ldots \quad . \qquad (1)$$

Euler gab eine Methode an, wie Zerfällungen in natürliche Zahlen auf einfache Weise abgezählt werden können.

Satz (1): In der Identität

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^n}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)\, x^n \qquad (2)$$

stellt $p(n)$ die Anzahl der Partitionen der natürlichen Zahl n in Summanden aus der natürlichen Zahlenfolge dar.

Damit ist in Form von Potenzreihenprodukten die erzeugende Funktion von $p(n)$ gegeben. Dabei werden die Potenzreihen lediglich formal angewandt und die Elemente x sind unbestimmte Symbole. Durch diese Einschränkung waren Konvergenzuntersuchungen nicht erforderlich. In der jüngeren Entwicklung der Lehre von den Zerfällungen ist der formale Begriff der Potenzreihendarstellungen in den Hintergrund getreten, da besonders die feineren Hilfsmittel der Analysis zu weitreichenden Ergebnissen führten.

Wird die Größe n im Produkt der Formel (2) allgemein durch $mn+k$ ersetzt, so ist eine erzeugende Funktion für die Zahl der Zerfällungen einer natürlichen Zahl in Summanden aus der Restklasse $k(\mathrm{mod}\ m)$ gefunden.

Für ein Produkt der Form $\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n)$ ergibt sich als Anzahlfunktion die Zahl der Zerlegungen der natürlichen Zahlen in paarweise verschiedene Summanden aus der natürlichen Zahlenfolge. Ebenso läßt sich für diese Form die Verallgemeinerung für Summanden aus Restklassen angeben. Die Partition einer Zahl in verschiedene Summanden kann als Zerfällung dieser Zahl in Summanden mit der Mindestdifferenz eins gedeutet werden. Damit kann der erste Satz formuliert werden, der Zerfällungen aus Summanden einer bestimmten Restklasse in Zusammenhang mit Partitionen bringt, bei denen die Summanden gewissen Differenzenbedingungen genügen.

Satz (2): Die Anzahl der Partitionen einer natürlichen Zahl n in ungerade Summanden ist gleich der Anzahl Partitionen in Summanden der natürlichen Zahlenfolge mit der Mindestdifferenz eins.

Dieser Sachverhalt kommt in der folgenden elementaren Identität zum Ausdruck

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-x^{2n-1}}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n) \qquad (3)$$

Die letzten beiden Sätze sind von Euler bereits formuliert worden

Satz (3): Die Anzahl von Partitionen einer natürlichen Zahl in Summanden aus den Restklassen 1,4(mod 5) ist gleich der Anzahl Partitionen der Zahl n in Summanden der natürlichen Zahlenfolge mit der Mindestdifferenz zwei.

Satz (4): Die Anzahl von Partitionen einer natürlichen Zahl n in Summanden aus den Restklassen 2,3(mod 5) ist gleich der Anzahl von Partitionen einer Zahl n in Summanden der natürlichen Zahlenfolge mit der Mindestdifferenz zwei, wobei der Summand 1 unzulässig ist.

Beide Identitäten wurden gleichzeitig von Rogers [2] und Ramanujan [3] unabhängig voneinander hergeleitet. Während sich die Methodik bei Rogers auf bekannte und neue Relationen zwischen Thetaproduktdarstellungen und deren Reihenentwicklungen stützt, hat Ramanujan durch Kombination von Reihen und geschickte Umformungen bei Anwendung der bekannten Jacobi'schen Thetaproduktentwicklung einen Beweis geliefert. Beide Beweisführungen unterscheiden sich nur sehr wenig.

Im Anschluß an die Entwicklungen von Rogers und Ramanujan hat sich eine Vielzahl von Beweisen für den obigen Sachverhalt angeben lassen. Besonders hervorzuheben sind in diesem Zusammenhang die Namen Watson, Bayley und Slater. Diese Autoren haben besonderen Wert auf den Ausbau der analytischen Ergebnisse gelegt. Die Aussagen über Partitionen sind jedoch nicht weitergeführt worden. Eine interessante Ergänzung hat die Entwicklung der Partitionen mit Differenzenbedingungen durch eine Arbeit von A.Schur aus dem Jahre 1926 erfahren. Es gelang ihm, für ein unendliches Produkt eine unendliche Determinante anzugeben und diese in eine unendliche Reihe zu entwickeln. Aus den Eigenschaften der Koeffizienten gewann er den folgenden Satz.

Satz (5): Die Anzahl von Partitionen einer natürlichen Zahl n in Summanden aus den Restklassen 1,5(mod 6) ist gleich der Anzahl von Partitionen der Zahl n in Summanden der natürlichen Zahlenfolge mit der Mindest-

differenz drei, wobei keine aufeinanderfolgenden, durch drei teilbaren Summanden auftreten.

In diesem Satz treten erstmalig Teilbarkeitsforderungen für die Summanden neben die Differenzenbedingungen. In späteren Ausführungen kann gezeigt werden, daß diese Bedingungen weiter spezialisiert werden müssen, wenn neue Partitionsaussagen gewonnen werden sollen.

Satz (6): Ist $k \geq 3$ und $a < \frac{k}{2}$, $b = k-a$, so ist die Anzahl der Zerfällungen einer natürlichen Zahl n in verschiedene Summanden aus den Restklassen $a,b \pmod k$ gleich der Anzahl Zerfällungen dieser Zahl in Summanden aus den Restklassen $0,a,b \pmod k$, wobei die Summanden die Mindestdifferenz k haben und keine benachbarten Summanden aus der Restklasse $0 \pmod k$ zugelassen sind.

Diese Verallgemeinerung des Satzes (5) auf allgemeine Differenzenaussagen wurde ebenso von Schur [7] gezeigt. Eine weitere, re arithmetische Beweismethode ist dazu von Gleißberg angegeben worden [8].

In einer zeitlich sehr viel später liegenden Arbeit von H.L. Ald wird die Nichtexistenz gewisser Identitäten in der Lehre der Partitionen gezeigt. Es wurden zwei Sätze formuliert.

Satz (7): Die Zahl der Partitionen einer natürlichen Zahl n i Summanden aus der natürlichen Zahlenfolge mit der Mindestdifferenz $d (d > 2)$ ist nicht gleich einer Anzahl von Partitionen dieser Zahl n in Summanden aus irgendeiner Zahlenfolge.

Satz (8): Die Anzahl der Partitionen einer natürlichen Zahl n in Summanden aus der natürlichen Zahlenfolge mit der Mindestdifferenz $d (d > 3)$, wobei keine benachbarten durch d teilbaren Summanden in den Zerfällungen

enthalten sind, ist nicht gleich der Anzahl Zerfällungen dieser Zahl in Summanden aus irgendeiner Zahlenfolge.

Für die Werte $d = 1$ und $d = 2$ ist Satz (7) nicht erfüllt. In diesen Fällen sind Zahlenfolgen mit Zahlen aus bestimmten Restklassen angebbar. (Satz (2), (3), (4)). Ebenso zeigt das in Satz (5) von Schur erhaltene Ergebnis, daß Satz (8) für $d = 3$ nicht gilt.

An die bisher wiedergegebene Entwicklung schließt sich eine Folge von Sätzen an, die in meiner Diplomarbeit [17] gezeigt wurden und teilweise für spätere Überlegungen Anwendung finden werden. Im besonderen sind darin Partitionsaussagen für Zerfällungen, die in Satz (8) beschrieben sind, für den Wert $d = 2$ enthalten.

Satz (9): Die Anzahl von Partitionen einer natürlichen Zahl n in Summanden der natürlichen Zahlenfolge, wobei keine gleichen ungeraden Summanden in einer Zerfällung auftreten, ist gleich der Anzahl Zerfällungen dieser Zahl in Summanden aus den Restklassen $0,1,3 \pmod 4$.

Eine arithmetische Erweiterung dieses Satzes kann angegeben werden.

Satz (10): In der Identität

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{1+x^{2n-1}}{1-x^{2n}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g_N(n)\, x^n \qquad (4)$$

ist $g_N(n)$ gleich der Anzahl derjenigen Partitionen von n, die sich nicht aus paarweise gleichen ungeraden Summanden aufbauen und deren Summandenzahl N nicht übersteigt.

Der letzte Sachverhalt gibt Anlaß, die erhaltenen Partitionsaussagen mit Differenzenbedingungen zu erweitern.

Satz (11): Die Anzahl von Partitionen einer Zahl n in Summanden,

deren Mindestdifferenz zwei beträgt und die keine aufeinanderfolgenden geraden Zahlen besitzen, ist gleich der Anzahl Partitionen von n in Summanden aus den Restklassen $1,4,7 \pmod 8$.

Satz (12): Die Anzahl von Partitionen einer Zahl n in Summanden, deren Mindestdifferenz zwei beträgt, die keine aufeinanderfolgenden geraden Zahlen besitzen und deren Summanden größer 2 sind, ist gleich der Anzahl Partitionen von n in Summanden aus den Restklassen $3,4,5 \pmod 8$.

Die in Satz (11) enthaltenen Partitionsaussagen lassen sich analytisch wie folgt ausdrücken.

$$1+x\,\frac{1+x}{1-x^2}+x^4\,\frac{(1+x)(1+x^3)}{(1-x^2)(1-x^4)}+x^9\,\frac{(1+x)(1+x^3)(1+x^5)}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)}+\ldots$$

$$\ldots+x^{n^2}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+x^{2k-1}}{1-x^{2k}}\right)+\ldots=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{8n+1})(1-x^{8n+4})(1-x^{8n+7})} \tag{5}$$

Da gewisse Teile der Beweisführung für die Sätze (11) bzw. (12) später Verwendung finden, wird ein skizzenhafter Abriß gegeben [17].

Es wird eine Hilfsfunktion erklärt:

$$G(s)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n s^{2n}x^{n(4n-1)}(1-sx^{4n})\,\frac{(1+x)(1+x^3)\ldots(1+x^{2n-1})}{(1+sx)(1+sx^3)\ldots(1+sx^{2n-1})}$$

$$\cdot\,\frac{(1-sx^2)(1-sx^4)\ldots(1-sx^{2n-2})}{(1-x^2)(1-x^4)\ldots(1-x^{2n})} \tag{6}$$

Dafür ist eine Funktionalgleichung herleitbar:

$$(1+sx)(1+sx^3)\left\{\frac{G(s)}{1-sx^2} - G(sx^2)\right\} = sx^2(1-sx^4)G(sx^4) \qquad (7)$$

Durch die Substitution

$$H(s) = G(s) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1+sx^{2n-1}}{1-sx^{2n}} \qquad (8)$$

kann die Funktionalgleichung umgeformt werden in

$$H(s) = H(sx^2)(1+sx) + sx^2H(sx^4) \qquad (9)$$

Wird $H(s)$ in eine Reihe nach Potenzen von s entwickelt, so resultiert die Reihe

$$H(s)=1+s\,\frac{x(1+x)}{1-x^2} + s^2\,\frac{x^4(1+x)(1+x^3)}{(1-x^2)(1-x^4)} + s^3\,\frac{x^9(1+x)(1+x^3)(1+x^5)}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)} + \ldots$$

$$\ldots + s^n x^{n^2} \prod_{k=1}^{n} \frac{1+x^{2k-1}}{1-x^{2k}} + \ldots \qquad (10)$$

Für den Wert $s=1$ ergibt sich (5). Andererseits kann $G(1)$ nach der bekannten Jacobi'schen Produktentwicklung für Thetafunktionen in eine Produktdarstellung gebracht werden. Hieraus folgt Satz (11). Für $s=x^2$ ergeben sich die Aussagen von Satz (12).

Damit ist eine Übersicht über die bisherigen Entwicklungen auf dem Gebiet der Partitionen mit Differenzenbedingungen gegeben.

§ 1

Elementare Zerfällungsfunktionen

In Fortsetzung der bisher gezeigten Entwicklung der Partitionen mit Differenzenbedingungen werden nun Zerlegungen betrachtet in dem System der positiven, ganzen Zahlen mit der Einschränkung,

daß keine zwei gerade, gleiche Summanden in einer Zerfällung auftreten. Dabei soll die Reihenfolge wie bei den vorhergehenden Betrachtungen unwesentlich sein.

Die Funktion $g(n)$ bezeichne die Anzahl der Darstellungen der Zahl n aus Summanden der natürlichen Zahlenfolge mit der Forderung, daß keine zwei gerade, gleiche Summanden in einer Zerlegung enthalten sind.

Satz (1,1): In der Identität

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1+x^{2n}}{1-x^{2n-1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g(n)x^n \qquad (1,1)$$

ist $g(n)$ die angegebene Anzahlfunktion.

Eine elementare Umformung des unendlichen Produktes ergibt eine andere Fassung dieses Satzes:

> Die Anzahl der Zerfällungen einer natürlichen Zahl in Summanden, wobei keine zwei gleiche gerade in einer Partition auftreten, ist gleich der Anzahl Zerfällungen dieser Zahl in Summanden aus den Restklassen $1,2,3 \pmod 4$.

Satz (1,1) kann durch Satz (1,2) verallgemeinert werden und wird in dieser Form bewiesen.

Satz (1,2): In der Identität

$$\left(\frac{1}{1-x}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1+x^{mn}}{1-x^{mn+1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g^{(m)}(n)x^n \qquad (1,2)$$

ist $g^{(m)}(n)$ die Anzahl der Partitionen der Zahl n in Summanden aus den Restklassen von $0 \pmod m$ und von $1 \pmod m$, wobei keine gleichen Summanden aus der Restklasse von $0 \pmod m$ in einer Zerle-

gung enthalten sind.

Beweis: Folgende Teilsummen werden zum Beweis des Satzes untersucht

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} f_i \tag{1,3}$$

Hierin bezeichnen $f_i = f_i(x)$ Potenzentwicklungen der Gestalt

$$f_i(x) = \sum_{\nu_i} x^{\nu_i} \tag{1,4}$$

ν_i durchläuft sämtliche Partitionen in Summanden aus den Restklassen $0 \pmod m$ und $1 \pmod m$, wobei keine gleichen Summanden aus der Restklasse $0 \pmod m$ in einer Zerlegung enthalten sind und der größte, auftretende Summand i ist. Für $i=o$ werde $s_o = f_o = 1$ gesetzt. Für die Teilsummen lassen sich zwei Rekursionsformeln herleiten.

Allgemein gilt:

$$f_{mn} = x^{mn} \sum_{i=0}^{mn-1} f_i \; ; \; f_{mn+1} = \frac{x^{mn+1}}{1-x^{mn+1}} \sum_{i=0}^{mn} f_i$$

$$f_{mn+2} = f_{mn+3} = f_{mn+4} = \dots = f_{m(n+1)-1} = 0 \tag{1,5}$$

Unter Berücksichtigung von (1,3) folgt

$$s_{mn} = \sum_{i=0}^{mn} f_i = s_{mn-1} + x^{mn} s_{mn-1} = (1+x^{mn})\, s_{mn-1}$$

$$s_{mn+1} = \sum_{i=0}^{mn+1} f_i = s_{mn} + \frac{x^{mn+1}}{1-x^{mn+1}} s_{mn} = \frac{1}{1-x^{mn+1}} s_{mn} \tag{1,6}$$

Ferner gilt nach der zweiten Zeile von (1,5)

$$s_{mn+1} = s_{mn+2} = s_{mn+3} = \cdots s_{m(n+1)-1} \tag{1,7}$$

Nach Konstruktion ist

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} g^{(m)}(k)x^k + x^{n+1}R_n(x) \tag{1,8}$$

wobei $R_n(x)$ Potenzreihen in x sind.

Es sei P_n wie folgt erklärt

$$P_o=1,\ P_{mn} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1+x^{mk}}{1-x^{m(k-1)+1}},\ P_{mn-1} = \frac{1}{1+x^{mn}} \prod_{k=1}^{n} \frac{1+x^{mk}}{1-x^{m(k-1)+1}} \tag{1,9}$$

$$P_{mn+1} = P_{mn+2} = P_{mn+3} = P_{mn+4} = \cdots = P_{m(n+1)-1}$$

Es läßt sich nun $s_n = P_n$ unabhängig von n nachweisen.

Für die Werte $n = 0$ und 1 gilt

$$s_o=P_o=1,\ s_1=P_1=s_2=P_2= \cdots =s_{m-1}=P_{m-1}= \frac{1}{1-x},\ P_m = \frac{1+x^m}{1-x} = s_m$$

Ferner erfüllt die Funktion P_n die rekursive Beziehung (1,6)

$$P_{mn} = (1+x^{mn})\ P_{mn-1}\ ;\ P_{mn+1} = \frac{1}{1-x^{mn+1}}\ P_{mn} \tag{1,10}$$

Mit n gegen Unendlich folgt die Behauptung von Satz (1,2). Damit ist gleichzeitig für $m=2$ Satz (1,1) bewiesen.

Um weitergehende Partitionsaussagen zu erhalten, wird nach einer Anzahlfunktion der in Satz (1,1) beschriebenen Art gefragt, wobei die Summandenzahl beschränkt ist.

Satz (1,3): In der Darstellung

$$1 + \sum_{m=1}^{N} x^m \prod_{k=1}^{m} \frac{1+x^{2k-1}}{1-x^{2k}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g_N(n)\, x^n \qquad (1,11)$$

ist $g_N(n)$ die Anzahl derjenigen Partitionen von n, die sich nicht aus gleichen geraden Summanden aufbauen und deren Summandenzahl N nicht übersteigt.

Der Beweis dieses Satzes beruht auf Satz (10). Die in Satz (10) charakterisierte Anzahlfunktion sei jetzt mit $G_N(n)$ bezeichnet. Dann kann für (1,11) geschrieben werden

$$\left\{1 + \sum_{m=1}^{N} x^m (1 + \sum_{n=1}^{\infty} G_m(n) x^n) \right\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g_N(n)\, x^n \qquad (1,12)$$

Die Größe x^m werde wie folgt zerlegt

$$x^m = x^{1+1+1+ \ldots + 1} \qquad (1,13)$$

Ebenso sei

$$G_m(n)\, x^n = \sum_{\nu_n} x^{\nu_n} \qquad (1,14)$$

wobei ν_n sämtliche $G_m(n)$ Zerfällungen von n durchläuft, die sich nicht aus gleichen ungeraden Summanden aufbauen und deren Summandenzahl m nicht übersteigt. Wird die Größe x^m in (1,13) mit (1,14) multipliziert, so durchläuft ν_n dann bei entsprechender Schreibweise genau die Menge der Zerfällungen von n, die sich nicht aus gleichen geraden Summanden aufbauen und deren Summandenzahl gleich m ist, bis auf die minimale Zerfällung von m in m Summanden eins. Wird diese Zerfällung angefügt und über m von 1 bis N summiert, so ist die neue Anzahlfunktion gleich $g_N(n)$.

Unter Verwendung der gleichen Methode, wie sie in Satz (1,2) skizziert wurde, läßt sich eine weitere Partitionsfunktion

herleiten, die bei späteren Untersuchungen Anwendung finden wird.

Satz (1,4): In der Identität

$$P(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1+x^{mn-1}}{1-x^{mn}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g^{(m)}(n)\, x^n \qquad (1,15)$$

ist $g^{(m)}(n)$ die Anzahl der Partitionen der Zahl n in Summanden aus den Restklassen von $0 (\mathrm{mod}\ m)$ und von $m-1 (\mathrm{mod}\ m)$, wobei keine gleichen Summanden aus der Restklasse von $m-1 (\mathrm{mod}\ m)$ in einer Zerlegung enthalten sind.

Beweis: Analog dem Vorgehen zum Beweis des Satzes (1,2) werden folgende Teilsummen untersucht

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} f_i \quad , \; s_0 = f_0 = 1 \qquad (1,16)$$

$f_i = f_i(x)$ ist durch (1,4) erklärt, wobei ν_i jetzt die Menge der durch Satz (1,4) beschriebenen Partitionen durchläuft, deren größter Summand i ist.

Es gilt

$$f_{mn} = \frac{x^{mn}}{1-x^{mn}} \sum_{i=0}^{mn-1} f_i \; ; \; f_{mn-1} = x^{mn-1} \sum_{i=0}^{mn-2} f_i \qquad (1,17)$$

Nach (1,16) folgt

$$s_{mn} = \sum_{i=0}^{mn} f_i = s_{mn-1} + \frac{x^{mn}}{1-x^{mn}}\, s_{mn-1} = \frac{1}{1-x^{mn}}\, s_{mn-1} \qquad (1,18)$$

$$s_{mn-1} = \sum_{i=0}^{mn-1} f_i = s_{mn-2} + x^{mn-1}\, s_{mn-2} = (1 + x^{mn-1})\, s_{mn-2}$$

Auf Grund der Forderung, daß lediglich Summanden aus den

Restklassen 0, m-1 (mod m) zugelassen sind, gilt die Relation

$$s_{mn-2} = s_{mn-3} = s_{mn-4} = \cdots = s_{m(n-1)} \qquad (1,19)$$

Folgende Produkte werden erklärt

$$P_o = 1 \; ; \; P_{mn} = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1+x^{mk-1}}{1-x^{mk}}\right), \; P_{mn-1} = (1-x^{mn}) \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1+x^{mk-1}}{1-x^{mk}}\right)$$

$$P_{mn-2} = P_{mn-3} = \cdots P_{m(n-1)} \qquad (1,20)$$

und die Behauptung lautet

$$s_n = P_n \quad \text{für alle} \quad n \qquad (1,21)$$

Der Vergleich der Anfangswerte ergibt

$$s_o = P_o = 1, \; s_1 = P_1 = 1, \; \cdots \; s_{m-2} = P_{m-2}, \; s_{m-1} = P_{m-1} = (1+x^{m-1}) \qquad (1,22)$$

Ferner gelten die den Beziehungen (1,18), (1,19) entsprechenden Gleichungen für P_{mn}.

$$P_{mn} = \frac{1}{1-x^{mn}} \; P_{mn-1} \; ; \; P_{mn-1} = (1+x^{mn-1}) \; P_{mn-2} \qquad (1,23)$$

Damit ist die Behauptung (1,21) gezeigt und mit n gegen Unendlich Satz (1,4) bewiesen.

Arithmetische Ergänzung

Partitionen mit Differenzenbedingungen machen es im allgemeinen erforderlich, Zerlegungen ohne Differenzenbedingungen zu untersuchen, wobei die Summandenzahl dieser Zerlegungen beschränkt

ist. In Erweiterung von Satz (1,4) wird behauptet:

Satz (1,5): In der Identität

$$P_N = \prod_{n=1}^{N} \frac{1+x^{mn-1}}{1-x^{mn}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g_N^{(m)}(n)\, x^n \qquad (1,24)$$

ist $g_N^{(m)}(n)$ die Anzahl der Partitionen der Zahl n in Summanden aus den Restklassen $0(\mathrm{mod}\ m)$ und $m-1(\mathrm{mod}\ m)$, wobei keine gleichen Summanden aus der Restklasse $m-1(\mathrm{mod}\ m)$ in einer Zerlegung vorkommen und deren Summandenzahl N nicht übersteigt.

Beweis: Satz (1,5), der für N gegen Unendlich bereits gezeigt ist, wird auf arithmetischem Wege durch vollständige Induktion bewiesen. Zur Vereinfachung wird das Vorgehen am Falle $m=3$ demonstriert werden. Für die Werte $N=0$ und $N=1$ ist Satz (1,5) erfüllt. Angenommen der Satz sei bis zu einem M hin bereits bewiesen, dann ist

$$P_M = \prod_{n=1}^{M} \frac{1+x^{mn-1}}{1-x^{mn}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g_M^{(m)}(n)\, x^n \qquad (1,25)$$

Wenn gezeigt werden kann, daß durch Hinzufügen des Faktors $\frac{1+x^{Mm+m-1}}{1-x^{Mm+m}}$ diejenigen Partitionen von n beschrieben sind, die aus genau $(M+1)$ Summanden, mit den genannten Eigenschaften bestehen, so wäre der Beweis gegeben.

Folgende arithmetische Identität läßt sich zeigen

$$\overline{g_{M+1}^{(m)}(n)} = \sum_k \left[g_M^{(m)}(n-k) + g_M^{(m)}(n-k-1) \right]$$

mit (1,26)

$$g_{M+1}^{(m)}(n) = g_M^{(m)}(n) + \overline{g_{M+1}^{(m)}(n)}$$

wobei k die Werte $\equiv Mm+m-1 \pmod{Mm+m}$ durchläuft und $\overline{g_{M+1}^{(m)}(n)}$ die oben beschriebenen Partitionen erfaßt, die aus genau M+1 Summanden bestehen.

Es sei n eine beliebige aber feste Zahl. Die Partitionen in genau (M+1) Summanden werden nach der Größenordnung ihres kleinsten Summanden geordnet. Es ergibt sich eine Menge von Partitionen, deren kleinster Summand (m-1) ist; eine Menge, deren kleinster m ist; eine Menge deren kleinster 2m-1 ist usw. Wird von sämtlichen Partitionen der ersten Menge vom letzten Summanden (m-1) und von allen übrigen Summanden m abgezogen, so ergeben sich $g_M^{(m)}[n-(Mm+m-1)]$ der in Satz (1,5) erfaßten Zerlegungen. Entsprechend resultieren aus den Partitionen der zweiten Menge, wobei von allen Summanden m abgezogen wird, $g_M^{(m)}[n-(Mm+m)]$ Zerlegungen. Wird von jeder Partition die betragsmäßig minimale Partition in (M+1) Summanden mit dem entsprechenden kleinsten Summanden subtrahiert, so führt dies allgemein auf die Menge $g_M^{(m)}(n-k)+g_M^{(m)}(n-k-1)$. Dabei nimmt k die Werte aus der Restklasse $\equiv Mm+m-1 \pmod{Mm+m}$ an.

Der Vorgang wird am Beispiel M=2, m=3, n=20 demonstriert. Sämtliche Zerfällungen in genau drei Summanden mit den genannten Einschränkungen lauten:

15+3+2;	12+6+2;	9+9+2;	14+3+3;	11+6+3;	9+8+3;	9+6+5;	8+6+6
− 3+3+2;	3+3+2;	3+3+2;	3+3+3;	3+3+3;	3+3+3;	6+6+5;	6+6+6
12 ;	9+3 ;	6+6 ;	11 ;	8+3 ;	6+5 ;	3 ;	2

oder

$$\overline{g_3^{(3)}(20)} = g_2^{(3)}(12) + g_2^{(3)}(11) + g_2^{(3)}(3) + g_2^{(3)}(2) \qquad (1,27)$$

Die minimalen Partitionen werden beschrieben durch die Zahlenfolgen $\equiv Mm+m-1 \pmod{Mm+m}$ und $\equiv Mm+m \pmod{Mm+m}$. Damit sind die Zerlegungen in genau (M+1) Summanden auf Zerlegungen in höchstens M Summanden zurückgeführt, und die Identität (1,26) ist nachgewiesen. Andererseits gilt aber

$$\frac{1+x^{mM+m-1}}{1-x^{mM+m}} \prod_{n=1}^{M} \frac{1+x^{mn-1}}{1-x^{mn}} = \left(\frac{1-x^{mM+m-1}}{1-x^{mM+m}}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} g_M^{(m)}(n)x^n\right) \tag{1,28}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(g_M^{(m)}(n)+\left(\sum_k g_M^{(m)}(n-k)+g_M^{(m)}(n-k-1)\right)\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} g_{M+1}^{(m)}(n)x^n$$

Hierin durchläuft k die Werte $mM+m-1 \pmod{mM+m}$. Damit ist der Schluß von M auf $M+1$ erfolgt.

Satz (1,5) ist als formale Potenzreihenidentität gezeigt. Bevor auf allgemeine Konvergenzfragen eingegangen wird, sei eine später benötigte Verallgemeinerung des letzten Satzes angegeben.

Satz (1,6): In der Identität

$$1+\sum_{n=1}^{N} x^n \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1+x^{mk-1}}{1-x^{mk}}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g_N'^{(m)}(n)x^n \tag{1,29}$$

ist $g_N'^{(m)}(n)$ die Anzahl Zerlegungen der Zahl n in Summanden aus den Restklassen $0,1 \pmod m$, wobei keine gleichen Summanden aus der Restklasse $0 \pmod m$ in einer Zerlegung vorkommen und deren Summandenzahl N nicht übersteigt.

Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz (1,3). Es werden die Terme $x^n = x^{1+1+1+\cdots}$ abgespaltet und man erhält die in Satz (1,5) beschriebene Anzahlfunktion.

Konvergenzfragen

Es ist erlaubt für $0<x<1$ die in (1,15), (1,24) und (1,29) erklärten Produkte P und P_N in Form eines Produktes unendlicher, absolut konvergenter Reihen aufzustellen. Für die Zerfällungsfunktion läßt sich schreiben

$$g_N^{(m)}(n) = g^{(m)}(n) \qquad \text{für} \qquad n \leq mN \tag{1,30}$$

sonst

$$g_N^{(m)}(n) \leq g(n)$$

Schließlich strebt für N gegen Unendlich $g_N^{(m)}(n) \longrightarrow g(n)$. Daher kann für P_N geschrieben werden

$$P_N = \sum_{n=0}^{mN} g^{(m)}(n)x^n + \sum_{n=mN+1}^{\infty} g_N^{(m)}(n)x^n \tag{1,31}$$

Ferner gilt

$$\sum_{n=0}^{mN} g^{(m)}(n)x^n < P_N(x) < P(x) \qquad 0 < x < 1 \tag{1,32}$$

denn $P(x)$ ist für $0 < x < 1$ konvergent.

Daher sind $\sum_{n=0}^{\infty} g^{(m)}(n)x^n$ und ebenso die Potenzreihen in (1,24) und (1,29) für $0 < x < 1$ konvergent.

Für N gegen Unendlich ergibt sich

$$P = \lim_{N \to \infty} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} g_N^{(m)}(n)x^n\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g^{(m)}(n)x^n \tag{1,33}$$

Somit ist die Konvergenz der bisher untersuchten Reihen allgemein nachgewiesen.

§ 2

Kombinatorische Methoden

Die in der Einleitung zusammengestellten Ergebnisse sollen mit verschiedenen Methoden in den einzelnen Fällen weitergeführt werden. In Erweiterung der Sätze (1,1) und (1,2) werden folgende

Aussagen gemacht.

Satz (2,1): Die Anzahl $F_1^{(1)}(n)$ von Partitionen einer Zahl n in Summanden, deren Mindestdifferenz zwei beträgt und die keine aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen besitzen, ist gleich der Anzahl Partitionen von n in Summanden aus den Restklassen $1,5,6 \pmod 8$.

Satz (2,2): Die Anzahl $F_2^{(1)}(n)$ von Partitionen einer Zahl n in Summanden, deren Mindestdifferenz zwei beträgt, die keine aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen besitzen und deren Summanden größer 1 sind, ist gleich der Anzahl Partitionen von n in Summanden aus den Restklassen $2,3,7 \pmod 8$.

Der Beweis dieser Sätze wird erst später geführt (Satz (2,5)). Zunächst werden für die erzeugenden Funktionen von $F_1^{(1)}(n)$ und $F_2^{(1)}(n)$ Identitäten abgeleitet, auf die die Sätze (2,1) und (2,2) zurückgeführt werden können.

In einer seit Euler bekannten Schlußweise werden verschiedene Partitionsaussagen zusammengefaßt, um allgemeinere Partitionen mit Differenzenbedingungen zu erhalten. In der Potenzentwicklung $(1+\sum_{n=1}^{\infty} F_1^{(1)}(n)x^n)$ werde der Exponent n in eine Quadratzahl m^2 und einen Rest l zerlegt.

$$n = m^2 + l \tag{2,1}$$

Diese Quadratzahl wird dargestellt als Summe von m ungeraden Zahlen

$$m^2 = (2m-1) + (2m-3) + \ldots + 5+3+1 \tag{2,2}$$

Ist l zerlegbar in nicht gleiche gerade Summanden l_i mit der Summandenzahl $(m-1)$ oder m, also

$$l = l_k + l_{k-1} + \ldots + l_3 + l_2 + l_1 , \quad (k=m,\ m-1)$$

und allgemein

$$l_i \geq l_j \quad \text{für} \quad i > j \quad \text{und} \quad l_i > l_j \quad \text{für} \quad i > j,\ l_j = 0(2)$$

so ergibt paarweise Addition der Summanden von l zu m^2 (l_k wird zu $(2m-1)$, l_{k-1} wird zu $(2m-3)$ addiert, usw.) genau eine durch $F_1^{(1)}(n)$ erfaßte Zerfällung von n. Läuft m von 1 bis ∞ und werden an m^2 die entsprechenden Zerlegungen von l angefügt, so führt das allgemein zu sämtlichen durch Satz (2,1) beschriebenen Zerfällungen von n.

Für die durch l erfaßten Partitionen sind beim Beweis des Satzes (1,3) erzeugende Funktionen angegeben worden. Werden diese mit x^{m^2}, $(m=1,2,3\ \ldots)$ kombiniert, so resultiert daraus die Identität

$$1+x\left(1+\frac{x(1+x)}{(1-x^2)}\right)+x^4\left(\frac{x(1+x)}{(1-x^2)}+\frac{x^2(1+x)(1+x^3)}{(1-x^2)(1-x^4)}\right)+\ldots$$

$$+\ldots+x^{n^2}\left[x^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1+x^{2k-1}}{1-x^{2k}}+x^n\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+x^{2k-1}}{1-x^{2k}}\right)\right]=1+x\left(\frac{1}{(1-x)}\right)+$$

$$+x^4\left(x\frac{(1+x)}{(1-x)(1-x^4)}\right)+\ldots\ x^{n^2}\left[x^{n-1}\frac{(1+x)}{(1+x^{2n-1})}\prod_{k=1}^{n}\frac{1+x^{2k-1}}{1-x^{2k}}\right]$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}F_1^{(1)}(n)\,x^n \qquad (2,3)$$

Für die zweite durch Satz (2,2) erklärte Anzahlfunktion $F_2^{(1)}(n)$, die Anzahl der Partitionen mit den gleichen Bedingungen aus Satz (2,1), lediglich zusätzlich mit Summanden oberhalb 1, werde in $(1+\sum_{n=1}^{\infty}F_2^{(1)}(n)x^n)$ der Exponent n in folgender Weise zerlegt:

$$n = m(m+1) + l \qquad (2,4)$$

Die Zahl $m(m+1)$ wird als Summe von m geraden Zahlen geschrieben

$$m(m+1) = (2m) + (2m-2) + \ldots + 6 + 4 + 2 \qquad (2,5)$$

Beschreibt l die Menge der Partitionen

$$l = l_k + l_{k-1} + \ldots + l_1 \qquad (k = 1,2, \ldots m)$$

mit

$$l_i \geq l_j \quad \text{für} \quad i > j$$

und

$$l_i > l_j \quad \text{für} \quad i > j, \quad l_j \equiv 1(2)$$

so ergibt paarweise Addition von l zu $m(m+1)$, wie sie bei der Herleitung von $F_1^{(1)}(n)$ erklärt wurde, Zerfällungen aus der Menge $F_2^{(1)}(n)$. Für die Zerlegungen von l ist in Satz (10) ein erzeugende Funktion gegeben. Daher gilt allgemein

$$1+x^2\cdot\left(\frac{1+x}{1-x^2}\right) + x^6\,\frac{(1+x)(1+x^3)}{(1-x^2)(1-x^4)} + \ldots + x^{n(n+1)}\prod_{k=1}^{n}\frac{(1+x^{2k-1})}{(1-x^{2k})}+\ldots = \qquad (2,6)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_2^{(1)}(n)\, x^n$$

Die zuletzt erhaltene Entwicklung entspricht der früher erklärten Funktion $H(x)$ (10). Die in der Identität (2,3) gegebene Reihe stimmt mit der Funktion $H(x)+ xH(x^3)= H(1/x)-H(x)$ überein

Es gilt nach (8)

$$H(x) = G(x)\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+x^{2n}}{1-x^{2n+1}}\right) = (1-x)\,G(x)\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-x^{4n}}{1-x^{n}}\right) \qquad (2,7)$$

Die Behauptung von Satz (2,2) lautet analytisch formuliert

$$H(x) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{8n+2})(1-x^{8n+3})(1-x^{8n+7})} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-x^{4n}}{1-x^{n}}\right) \cdot$$

$$\cdot \prod_{n=0}^{\infty} (1-x^{8n+1})(1-x^{8n+5})(1-x^{8n+6}) \qquad (2,8)$$

oder nach (6)

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-x^{8n+1})(1-x^{8n+5})(1-x^{8n+6}) = (1-x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{4n^2+n}(1-x^{4n+1})$$

$$\cdot \frac{(1-x^2)(1-x^6)(1-x^{10}) \ \ldots \ (1-x^{4n-2})}{(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{12}) \ \ldots \ (1-x^{4n})} \qquad (2,9)$$

Daraus ist ersichtlich, daß die angegebenen Identitäten und die damit verknüpften Partitionsaussagen sich nicht elementar aus Thetareihen und deren Produktdarstellungen im Gegensatz zu (5) herleiten lassen.

Verallgemeinerte Partitionsfunktionen

Die unter (2,1) und (2,2) angegebenen Sätze werden jetzt verallgemeinert.

Satz (2,3): Die Anzahl Partitionen einer Zahl n in Summanden deren Mindestdifferenz (m+1) beträgt, die keine aufeinanderfolgenden Summanden m(mod m+1) haben und die lediglich die Summanden m, m+1(mod m+1) enthalten, ist gleich der Anzahl Partitionen von n in verschiedene Summanden aus den Restklassen m, m+1, 2m+2(mod 2m+2).

Satz (2,4): Die Anzahl Partitionen einer Zahl n in Summanden, deren Mindestdifferenz (m+1) beträgt, die keine

aufeinanderfolgenden Summanden $m \pmod{m+1}$ haben und die lediglich die Summanden $m+1,\ 2m+1 \pmod{m+1}$ enthalten, ist gleich der Anzahl Partitionen von n in verschiedene Summanden aus den Restklassen $m+1,\ 2m+1,\ 2m+2 \pmod{2m+2}$.

Es ist ersichtlich, daß für $m=1$ die Aussagen der Sätze (2,1) und (2,2) in (2,3) und (2,4) enthalten sind. In völlig analoger Weise zu den vorangegangenen Betrachtungen werden die erzeugenden Funktionen für die verallgemeinerten Partitionen entwickelt.

An die Zerlegungen der Zahlen $\frac{m+1}{2}n^2 + \frac{m-1}{2}n$ in n Summanden aus der Restklasse $m \pmod{m+1}$ werden Zerlegungen, die nach Satz (1,6) erklärt sind und deren Summandenzahl $(n-1)$ oder n ist, angefügt. Daraus ergeben sich genau die in Satz (2,3) formulierten Zerfällungsfunktionen.

Für das Beispiel $m=2$ lautet die Reihendarstellung:

$$1+x^2\left(1+\frac{x(1+x^2)}{(1-x^3)}\right)+x^7\left(\frac{x(1+x^2)}{(1-x^3)}+\frac{x^2(1+x^2)(1+x^5)}{(1-x^3)(1-x^6)}\right)+\ldots$$

$$+x^{\frac{1}{2}n(3n+1)}\left[x^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1+x^{3k-1}}{1-x^{3k}}\right)+x^n\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+x^{3k-1}}{1-x^{3k}}\right)\right] = 1+\sum_{n=1}^{\infty}F_1^{(2)}(n)x^n \qquad (2,10)$$

Die allgemeine Darstellung der in Satz (2,3) aufgestellten Behauptung für die Partitionsfunktion $F_1^{(m)}(n)$ ist

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+x^{(2m+2)n+m})(1+x^{(2m+2)n+m+1})(1+x^{(2m+2)n+2m+2}) =$$

$$=1+\frac{x^m(1+x)}{1-x^{m+1}}+\left(\frac{1+x}{1-x^{m+1}}\right)\sum_{l=1}^{\infty}x^{\frac{l(m+1)}{2}(l+3)+m}\prod_{k=1}^{l}\frac{(1+x^{m+(k-1)(m+1)})}{(1-x^{(k+1)(m+1)})} =$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}F_1^{(m)}(n)x^n \qquad (2,11)$$

Durch elementare Umformung kann für (2,11) auch geschrieben werden

$$= (1+x^m)\left[1+\frac{x^{m+1}(1+x^{2m+1})}{1-x^{m+1}}+\ldots+x^{\frac{n(n+1)(m+1)}{2}}\prod_{k=1}^{n}\frac{(1+x^{m+k(m+1)})}{(1-x^{k(m+1)})}+\ldots\right] \tag{2,12}$$

Der zweite in Satz (2,4) formulierte Sachverhalt, kann als Zusammenfassung der Zerlegungen der Zahlen $(\frac{m+1}{2})\cdot n\cdot(n+1)$ in n Summanden $\equiv m+1 \pmod{m+1}$ und solchen, die durch Satz (1,5) erklärt sind, dargestellt werden.

Hieraus ergibt sich die erzeugende Funktion

$$\prod_{n=o}^{\infty}(1+x^{(2m+2)n+(m+1)})(1+x^{(2m+2)n+(2m+1)})(1+x^{(2m+2)n+(2m+2)}) =$$

$$= \left[1+x^{m+1}\frac{(1+x^m)}{(1-x^{m+1})}+\ldots+x^{\frac{(m+1)\cdot n(n+1)}{2}}\prod_{k=1}^{n}\frac{(1+x^{(m+1)k-1})}{(1-x^{(m+1)k})}+\ldots\right]$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}F_2^{(m)}(n)x^n \tag{2,13}$$

Sämtliche in diesem Paragraphen angeführten Partitionsaussagen ergeben sich aus dem folgenden Satz.

Satz (2,5): Im Ring der Potenzreihen der Unbestimmten x und s über dem Ring der ganzen Zahlen gilt:

$$\prod_{n=o}^{\infty}(1+x^{m+1+n(2m+2)})(1+x^{2m+2+n(2m+2)})(1+sx^{3m+2+n(2m+2)}) \tag{2,14}$$

$$=1+\frac{x^{m+1}(1+sx^{2m+1})}{1-x^{m+1}}+\ldots+x^{\frac{n(n+1)(m+1)}{2}}\prod_{k=1}^{n}\frac{(1+sx^{m+k(m+1)})}{1-x^{k(m+1)}}+\ldots$$

Für die Werte s=1 bzw. $s=x^{-(m+1)}$ sind die in (2,11) und (2,13) dargelegten Identitäten in (2,14) enthalten.

Beweis: Der Beweis dieses Satzes teilt sich in zwei Abschnitte. Im ersten Abschnitt wird durch eine Folge von Umformungen und

Kombinationen das erste Glied der Reihe so abgeändert, daß in ihm mehrere Faktoren erscheinen, die auch im unendlichen Produkt enthalten sind. Daran anschließend wird durch vollständige Induktion gezeigt, daß das angegebene Vorgehen das unendliche Produkt aufbaut.

Zunächst werden jeweils zwei aufeinanderfolgende Summanden in der Reihe (2,14) zusammengefaßt. Daraus ergibt sich die Reihe

$$\left[\frac{1+sx^{3m+2}}{1-x^{m+1}} + \frac{x^{3m+3}(1+sx^{2m+1})(1+sx^{3m+2})(1+sx^{7m+6})}{(1-x^{m+1})(1-x^{2m+2})(1-x^{3m+3})} + \cdots \right. \tag{2,15}$$

$$\left. + (1+sx^{3m+2+4r(m+1)})\frac{x^{r(2r+1)(m+1)}}{(1-x^{(2r+1)(m+1)})} \cdot \prod_{k=1}^{2r} \frac{(1+sx^{m+k(m+1)})}{(1-x^{k(m+1)})} + \cdots\right]$$

Im folgenden werden für die Reihen stets mindestens das nullte und das r-te Glied wiedergegeben.

Das r-te und das (r+1)-te Glied in der Entwicklung (2,15) werden zusammengefaßt. Daraus ergibt sich für das neue r-te Glied

$$x^{(2r+1)r(m+1)} \prod_{k=1}^{2r} \frac{(1+sx^{m+k(m+1)})}{(1-x^{k(m+1)})} \cdot \left\{\frac{1+sx^{3m+2+4r(m+1)}}{1-x^{(2r+1)(m+1)}} + \right.$$

$$+ x^{(4r+3)(m+1)}\frac{(1+sx^{3m+2+4(r+1)(m+1)})(1+sx^{m+(2r+1)(m+1)})}{(1-x^{(2r+3)(m+1)})(1-x^{(2r+1)(m+1)})} \cdot$$

$$\left. \cdot \frac{(1+sx^{m+2(r+1)(m+1)})}{(1-x^{2(r+1)(m+1)})}\right\}$$

Für die geschweifte Klammer $\{\ \}$ kann geschrieben werden

$$\Big\{ \underbrace{\frac{(1+sx^{2r(m+1)+3m+2}) - sx^{2r(m+1)+3m+2}(1-x^{2r(m+1)})}{(1-x^{(2r+1)(m+1)})}}_{(=A_r)} + \underbrace{\qquad\qquad}_{(=B_r)} \tag{2,17}$$

$$+x^{(4r+3)(m+1)} \frac{(1+sx^{m+(2r+1)(m+1)})(1+sx^{m+2(r+1)(m+1)})}{(1-x^{(2r+1)(m+1)})(1-x^{2(r+1)(m+1)})(1-x^{(2r+3)(m+1)})} \cdot$$

$$\cdot \underbrace{\Big[(1+sx^{2(r+1)(m+1)+3m+2}) - sx^{2(r+1)(m+1)+3m+2}(1-x^{2(r+1)(m+1)})\Big]}_{(=A_{r+1})} \Big\} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{(=B_{r+1})}$$

Die in (2,17) beschriebenen vier additiven Terme für das r-te Glied werden in folgender Weise zusammengefaßt: ($B_0=0$)

$$A_0+B_1 \; ; \quad A_1+B_2 \; ; \quad A_2+B_3 \; ; \; \ldots \; A_r+B_{r+1} \; , \; \ldots$$

Daraus resultiert die neue Reihe

$$\Big\{ \frac{(1+sx^{3m+2})(1-x^{2(m+1)})(1+sx^{5m+4})(1-x^{3(m+1)}-sx^{5m+4})}{(1-x^{(m+1)})(1-x^{2(m+1)})(1-x^{3(m+1)})} + \ldots$$

$$+ x^{(2r+1)r(m+1)} \Big(\prod_{k=1}^{2r} \frac{1+sx^{m+k(m+1)}}{1-x^{k(m+1)}} \Big) \cdot \tag{2,18}$$

$$\cdot (1+sx^{2r(m+1)+3m+2})(1-x^{(2r+1)(m+1)}) \cdot$$

$$\cdot \frac{\big[(1+sx^{4(r+1)(m+1)+m})(1-x^{(2r+3)(m+1)}-sx^{4(r+1)(m+1)+m})\big]}{(1-x^{(2r+1)(m+1)})(1-x^{2(r+1)(m+1)})(1-x^{(2r+3)(m+1)})} + \ldots \Big\}$$

Die beiden letzten Faktoren im Zähler des r-ten Gliedes erlauben die Aufspaltung

$$(1+sx^{4(r+1)(m+1)+m}) = 1-x^{2(m+1)r}+x^{2(m+1)r}(1+sx^{2r(m+1)+5m+4})$$

und

$$(1-x^{(2r+3)(m+1)}-sx^{4(r+1)(m+1)+m}) = \tag{2,19}$$

$$= 1-x^{(2r+3)(m+1)}(1+sx^{(2r+1)(m+1)+m})$$

Damit gelingt es, das r-te Glied aus der Entwicklung (2,18) umzuformen.

Es lautet

$$x^{(2r+1)r(m+1)}\left(\prod_{k=1}^{2r}\frac{1+sx^{m+k(m+1)}}{1-x^{k(m+1)}}\right)\cdot \tag{2,20}$$

$$\cdot\frac{(1+sx^{2r(m+1)+3m+2})(1-x^{2(r+1)(m+1)})}{(1-x^{(2r+1)(m+1)})(1-x^{2(r+1)(m+1)})(1-x^{(2r+3)(m+1)})}\cdot$$

$$(=D_m) \qquad\qquad (=C_m)$$

$$\cdot\Big\{(1-x^{2r(m+1)})(1-x^{(2r+3)(m+1)})-sx^{4(r+1)(m+1)+m}(1-x^{2r(m+1)})+$$

$$(=E_m)$$

$$+x^{2r(m+1)}(1+sx^{2r(m+1)+5r+4})-$$

$$(=F_m)$$

$$-x^{(4r+3)(m+1)}(1+sx^{2r(m+1)+5m+4})(1+sx^{(2r+1)(m+1)+m})\Big\}$$

Erneut werden die Terme in bestimmter Weise kombiniert. ($C_0=D_0=0$) Allgemein:

$$F_r + D_{r+1} \qquad \text{und} \qquad E_r + C_{r+1} \tag{2,21}$$

Es zeigt sich, daß die Summen erster Art unabhängig von r

verschwinden. Aus den letztgenannten Summen ergibt sich die Reihendarstellung

$$\left\{\frac{(1+sx^{3m+2})(1-x^{2(m+1)})(1-x^{4(m+1)})(1+sx^{7m+6})(1+sx^{5m+4})}{(1-x^{m+1})(1-x^{2(m+1)})(1-x^{3(m+1)})(1-x^{4(m+1)})(1-x^{5(m+1)})}\right.$$

$$\cdot(1-sx^{7m+6}-x^{5(m+1)}) + x^{(2r+3)r(m+1)} \left(\prod_{k=1}^{2r} \frac{1+sx^{m+k(m+1)}}{1-x^{k(m+1)}}\right) \cdot$$

$$\cdot \frac{(1+sx^{2r(m+1)+3m+2})(1-x^{2(r+1)(m+1)})}{(1-x^{(2r+1)(m+1)})(1-x^{2(r+1)(m+1)})} \cdot \qquad (2,22)$$

$$\cdot \frac{(1-x^{2(r+2)(m+1)})(1+sx^{2r(m+1)+5m+4})(1+sx^{2(2r+3)(m+1)+m})}{(1-x^{(2r+3)(m+1)})(1-x^{2(r+2)(m+1)})(1-x^{(2r+5)(m+1)})} \cdot$$

$$\left.\cdot (1-sx^{2(2r+3)(m+1)+m}-x^{(2r+5)(m+1)}) + \ldots\right\}$$

Das nullte Glied hat im Vergleich zum nullten Glied der Entwicklung (2,18) zusätzliche Faktoren, die das in (2,14) gewünschte Produkt weiter aufbauen. Wenn gezeigt werden kann, daß das r-te Glied nach N maliger Umformung entsprechend (2,19) und (2,21) stets die gleiche Struktur behält und die nächsten Faktoren abspaltet, so können unendlich viele Umformungen dieser Art erfolgen und das erste Glied einer jeden neu erhaltenen Reihe baut sich zu dem unendlichen Produkt auf. Zum Beweise wird das r-te Glied, das nach N maliger Umformung erhalten wurde, aufgeschrieben.

$$x^{(2(r+N)+1)(m+1)r} \prod_{k=1}^{2r} (1+sx^{m+k(m+1)}) \prod_{k=1}^{2(r+N)+3} \left(\frac{1}{1-x^{k(m+1)}}\right) \qquad (2,23)$$

$$\cdot \prod_{k=r}^{r+N} (1+sx^{2k(m+1)+3m+2})(1-x^{2(k+1)(m+1)})(1+sx^{4(r+1)(m+1)+2N(m+1)+m}).$$

$$\cdot \left[1-sx^{4(r+1)(m+1)+2N(m+1)+m} - x^{(2(r+N)+3)(m+1)} \right]$$

Wird auf diesen Ausdruck die Zusammenstellung nach (2,19) und (2,21) angewandt, so folgt für das r-te Glied ein Ausdruck

$$x^{(2r+2(N+1)+1)r(m+1)} \prod_{k=1}^{2r} (1+sx^{m+k(m+1)}) \prod_{k=1}^{2r+2(N+1)+3} \left(\frac{1}{1-x^{k(m+1)}}\right) \cdot$$

$$\cdot \left[\prod_{k=r}^{r+N+1} (1+sx^{2k(m+1)+3m+2})(1+sx^{(4r+2(N+1)+4)(m+1)+m}) \cdot \qquad (2,2\right.$$

$$\left. (1+x^{2(k+1)(m+1)}) \right] \cdot \left[1-sx^{(4r+2(N+1)+4)(m+1)+m} - x^{(2r+2(N+1)+3)(m+1)} \right.$$

Damit ist der Schluß von N auf (N+1) erfolgt. Das unendliche Produkt baut sich auf kombinatorische Weise im nullten Glied der Reihe auf. Das nullte Glied kann aus der Darstellung (2,23) entnommen werden, wenn zusätzlich vereinbart wird, daß Produkte, die für r=o nicht erklärt sind, gleich eins gesetzt werden. Alle übrigen Glieder wachsen mit N , wie aus dem Exponenten von x ersichtlich ist. Damit ist mittels vollständiger Induktion die Identität (2,14) gezeigt. Die Partitionsaussagen der Sätze (2,1) bis (2,4) sind damit ebenso bewiesen. Beiläufig ist die Identität (2,9) gezeigt.

§3

Arithmetische Erweiterung

Die im vorangegangenen Abschnitt eingeführten Partitionen mit allgemeinen Differenzenbedingungen beschränkten sich auf Summanden, die lediglich aus zwei Restklassen herrührten. Es entsteht die Frage nach Zerlegungen mit Differenzenbedingungen aus Summenden, die einer größeren Anzahl von Restklassen entstammen.

In Erweiterung der in der Einführung angegebenen Entwicklung von rein arithmetischen Methoden [7], [8] zum Nachweis bestimmter Zusammenhänge von Partitionsbeziehungen wird die oben gestellte Frage in Angriff genommen.

Satz (3,1): Die Anzahl der Partitionen einer Zahl n in Summanden aus den Restklassen 2, 5, 11 (mod 12) ist gleich der Anzahl Partitionen dieser Zahl n in Summanden mit der Mindestdifferenz 6, wobei keine benachbarten Summanden $\equiv 1, 3, 6 \pmod 6$ auftreten und die Summanden 1 und 3 unzulässig sind.

Eine elementare Umformung der erzeugenden Funktion für die an erster Stelle angeführten Partitionen liefert eine andere Fassung des Satzes. Es gilt

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{12n+2})(1-x^{12n+5})(1-x^{12n+11})} =$$

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1+x^{6n+2})(1+x^{6n+4})(1+x^{6n+5})$$

Satz (3,2): Die Anzahl von Partitionen einer Zahl n in verschiedene Summanden aus den Restklassen 2, 4, 5 (mod 6) ist gleich der Anzahl Partitionen dieser

Zahl n in Summanden mit der Mindestdifferenz 6, wobei keine benachbarten Summanden $\equiv 1, 3, 6 \pmod 6$ auftreten und die Summanden 1 und 3 unzulässig sind.

Beweis: Der Beweis dieses Satzes ist sehr langwierig. Er wird in zwei wesentliche Teile unterteilt werden. Der erste Teil ist den Zerfällungen in verschiedene Summanden aus den Restklassen $2, 4, 5 \pmod 6$ gewidmet. Die so erhaltene Anzahlfunktion wird mit $A(n)$ bezeichnet. Im zweiten Abschnitt werden die Partitionen mit den Differenzenbedingungen $(B(n))$ untersucht. Die Aussage des Satzes (3,2) wird in verschärfter Form bewiesen werden.

Satz (3,3): Die Anzahl von Partitionen einer Zahl n in verschiedene Summanden aus den Restklassen $2, 4, 5 \pmod 6$ mit der Summandenzahl s, ist gleich der Anzahl Partitionen dieser Zahl n in Summanden, mit der Mindestdifferenz 6, wobei keine benachbarten Summanden $\equiv 1, 3, 6 \pmod 6$ auftreten, die Summanden 1 und 3 unzulässig sind und die Summandenzahl s beträgt. Hierbei sind die Summanden aus den Restklassen $1, 3, 6 \pmod 6$ je als zwei Summanden zu zählen.

Wird die erstbeschriebene Menge $A(n,s)$ und die an zweiter Stelle beschriebene, $B(n,s)$ genannt, dann lautet die Behauptung

$$A(n,s) = B(n,s) \tag{3,1}$$

Beweis: Im ersten Teil des Beweises von Satz (3,3) wird eine Rekursionsformel für die Menge $A(n,s)$ angegeben, die lautet

$$\begin{aligned} A(n,s)=&A(n-6s,s)+A(n-6s+4,s-1)+A(n-6s+2,s-1)+A(n-6s+1,s-1)\\ &+A(n-6s+3,s-2)+A(n-6s+5,s-2)+A(n-6s+6,s-2)+A(n-6s+7,s-3) \end{aligned} \tag{3,2}$$

Die Menge der Zerfällungen in verschiedene Summanden aus den Restklassen $2, 4, 5 \pmod 6$ kann in acht verschiedene Klassen

(K_1) unterteilt werden. In der ersten Klasse sind Zerfällungen enthalten, die weder mit 2, 4 noch 5 enden. Von diesen kann von jedem Summanden die Zahl 6 abgezogen werden, ohne daß sich die Summandenzahl ändert (A(n-6s,s)) . K_2 ist die Menge Zerlegungen, die mit dem Summanden 2 enden, aber nicht die Summanden 4 und 5 enthalten. Wird von sämtlichen Summanden die Zahl 6 subtrahiert, so ergibt sich die Menge A(n-6s+4,s-1) . Entsprechend gelten für den Fall, daß Zerlegungen den Summanden 4 und nicht 2 und 5, bzw. den Summanden 5 und nicht 4 und 2 besitzen bzw. die Mengen A(n-6s+2,s-1) und A(n-6s+1,s-1) . Sind in den Zerfällungen die Summanden 4 und 5 enthalten und die Zahl 2 verboten, so ergibt sich nach Subtraktion der Zahl 6 von jedem Summanden die Menge K_5 = A(n-6s+3,s-2) . Sind in Zerfällungen die Zahlen 2, 5 zugelassen und 4 nicht bzw. 2, 4 zugelassen und 5 nicht, dann resultieren aus dem angegebenen Verfahren A(n-6s+5,s-2) bzw. A(n-6s+6,s-2) . Die letzte Menge ergibt sich schließlich aus Zerfällungen, die die Summanden 2, 4 und 5 enthalten. Subtraktion der Zahl 6 von jedem Summanden führt auf A(n-6s+7,s-3) . Damit ist die rekursive Beziehung (3,2) abgeleitet. Im zweiten Abschnitt wird gezeigt werden, daß für die Funktion B(n,s) die gleiche rekursive Beziehung nachgewiesen werden kann.

$$B(n,s)=B(n-6s,s)+B(n-6s+4,s-1)+B(n-6s+2,s-1)+B(n-6s+1,s-1)$$
$$+B(n-6s+3,s-2)+B(n-6s+5,s-2)+B(n-6s+6,s-2)+B(n-6s+7,s-3) \qquad (3,3)$$

Zum Beweis dieser Beziehung müssen mehrere Sätze hergeleitet werden, die ineinander geschachtelt sind.

Beschreibt $B_m(N,s)$ die Anzahl der Zerlegungen der Zahl N in Summanden mit den in Satz (3,3) an zweiter Stelle erklärten Eigenschaften und der Zusatzforderung, daß der größte Summand solcher Zerfällungen m ist, so gelten folgende Beziehungen:

$$B_{6n+1}(N,s) = \sum_{m=o}^{6n-6} B_m(N-6n-1,s-2) \qquad (3,4)$$

$$B_{6n+2}(N,s) = \sum_{m=0}^{6n-4} B_m(N-6n-2,s-1)$$

$$B_{6n+3}(N,s) = \sum_{m=0}^{6n-4} B_m(N-6n-3,s-2)$$

$$B_{6n+4}(N,s) = \sum_{m=0}^{6n-2} B_m(N-6n-4,s-1) \qquad (3,4)$$

$$B_{6n+5}(N,s) = \sum_{m=0}^{6n-1} B_m(N-6n-5,s-1)$$

$$B_{6n+6}(N,s) = \sum_{m=0}^{6n-1} B_m(N-6n-6,s-2)$$

Es wird $B_0(0,0)=1$ vereinbart. Sind dagegen nur ein oder zwei Parameter Null, so ist $B_m(N,s)$ identisch Null. Zur Erläuterung werde die erste Identität in (3,4) näher untersucht. Von jeder Zerlegung der natürlichen Zahl N in s Summanden genannter Art, deren größter Summand (6n+1) ist, werde der größte Summand (6n+1) abgezogen. Der zweitgrößte Summand ist auf Grund der Definition von $B_i(N,s)$ kleiner als (6n-5). Die Summandenzahl hat sich um 2 verringert, da der Summand (6n+1) als 2 Summanden gezählt wird. Die Anzahl Zerlegungen $B_{6n+1}(N,s)$ ist also gleich der Anzahl der in Satz (3,3) an zweiter Stelle erfaßten Zerlegungen von (N-6n-1) in s-2 Summanden, wobei der größte Summand höchstens gleich (6n-6) ist.

Die folgende Identität kann für die Werte (n=0, 1, 2, 3) bestätigt werden.

$$\sum_{m=0}^{6n+1} B_m(N,s) = \sum_{m=0}^{6n-7} B_m(N-6s,s) + \sum_{m=0}^{6n-7} B_m(N-6s+4,s-1) + \qquad (3,5)$$

$$\sum_{m=0}^{6n-8} B_m(N-6s+2,s-1) + \sum_{m=0}^{6n-7} B_m(N-6s+1,s-1) + \sum_{m=0}^{6n-10} B_m(N-6s+3,s-2) +$$

$$\sum_{m=0}^{6n-7} B_m(N-6s+5,s-2) + \sum_{m=0}^{6n-8} B_m(N-6s+6,s-2) + \sum_{m=0}^{6n-10} B_m(N-6s+7,s-3)$$

Es sei angenommen, sie ist bis zum Werte n erfüllt. Dann ist es möglich durch eine Folge von Sätzen, die sich auf diese Induktionsannahme stützen, zu zeigen, daß (3,5) allgemein gilt.

Satz (3,4):

$$B_{6n+2}(N,s) + B_{6n+3}(N,s) =$$

$$\begin{aligned}
&\Big[B_{6n-9}(N-6s+3,s-2)+B_{6n-9}(N-6s+7,s-3)+B_{6n-8}(N-6s+3,s-2)+\\
&+B_{6n-8}(N-6s+7,s-3)+B_{6n-7}(N-6s+2,s-1)+B_{6n-7}(N-6s+3,s-2)+\\
&+B_{6n-7}(N-6s+6,s-2)+B_{6n-7}(N-6s+7,s-3)+B_{6n-6}(N-6s,s)+\\
&+B_{6n-6}(N-6s+1,s-1)+B_{6n-6}(N-6s+4,s-1)+B_{6n-6}(N-6s+5,s-2)+\\
&+B_{6n-5}(N-6s,s)+B_{6n-5}(N-6s+4,s-1)+B_{6n-4}(N-6s,s)+\\
&+B_{6n-4}(N-6s+4,s-1)\Big]
\end{aligned} \qquad (3,6)$$

Beweis: (vollständige Induktion)
Für die Werte n=0, 1, 2 kann die Identität für beliebige Werte von N und s leicht bestätigt werden.
Nach (3,4) ist aber

$$B_{6n+8}(N,s)+B_{6n+9}(N,s)=\sum_{m=0}^{6n+2} B_m(N-6n-8,s-1)+\sum_{m=0}^{6n+2} B_m(N-6n-9,s-1) \qquad (3,7)$$

Ebenso nach (3,4) gilt

$$B_{6n+2}(N-1,s-1) = B_{6n+3}(N,s) \qquad (3,8)$$

sodaß (3,7) fortgesetzt werden kann

$$= \sum_{m=0}^{6n+1} B_m(N-6n-8,s-1) + \sum_{m=0}^{6n+1} B_m(N-6n-9,s-2) +$$

$$+ B_{6n+2}(N-6n-8,s-1) + B_{6n+3}(N-6n-8,s-1) \qquad (3,9)$$

Auf die Summen wird die Identität (3,5) zur Anwendung gebracht, auf die beiden additiven Glieder die Induktionsannahme (3,6).

Somit kann (3,9) weitergeführt werden.

(3,10)

$$\sum_{m=0}^{6n-7} B_m(N-6n-8-6(s-1),s-1) + \sum_{m=0}^{6n-7} B_m(N-6n-8-6(s-1)+4,s-1)+$$

$$\sum_{m=0}^{6n-8} B_m(N-6n-8-6(s-1)+2,s-2)+ \sum_{m=0}^{6n-7} B_m(N-6n-8-6(s-1)+1,s-2)+$$

$$\sum_{m=0}^{6n-10} B_m(N-6n-8-6(s-1)+3,s-3)+ \sum_{m=0}^{6n-7} B_m(N-6n-8-6(s-1)+5,s-3)+$$

$$\sum_{m=0}^{6n-8} B_m(N-6n-8-6(s-1)+6,s-3)+ \sum_{m=0}^{6n-10} B_m(N-6n-8-6(s-1)+7,s-4)+$$

$$\sum_{m=0}^{6n-7} B_m(N-6n-9-6(s-2),s-2) + \sum_{m=0}^{6n-7} B_m(N-6n-9-6(s-2)+4,s-3)+$$

$$\sum_{m=0}^{6n-8} B_m(N-6n-9-6(s-2)+2,s-3)+ \sum_{m=0}^{6n-7} B_m(N-6n-9-6(s-2)+1,s-3)+$$

$$\sum_{m=0}^{6n-10} B_m(N-6n-9-6(s-2)+3,s-4)+ \sum_{m=0}^{6n-7} B_m(N-6n-9-6(s-2)+5,s-4)+$$

$$\sum_{m=0}^{6n-8} B_m(N-6n-9-6(s-2)+6,s-4)+ \sum_{m=0}^{6n-10} B_m(N-6n-9-6(s-2)+7,s-5)+$$

$$+ \left\{ B_{6n-9}(N-6n-6s+1,s-3)+B_{6n-9}(N-6n-6s+5,s-4)+ \right.$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&+B_{6n-8}(N-6n-6s+1,s-3)+B_{6n-8}(N-6n-6s+5,s-4)+\\
&+B_{6n-7}(N-6n-6s,s-2)+B_{6n-7}(N-6n-6s+1,s-3)+\\
&+B_{6n-7}(N-6n-6s+4,s-3)+B_{6n-7}(N-6n-6s+5,s-4)+\\
&+B_{6n-6}(N-6n-6s-2,s-1)+B_{6n-6}(N-6n-6s-1,s-2)+\\
&+B_{6n-6}(N-6n-6s+2,s-2)+B_{6n-6}(N-6n-6s+3,s-3)+\\
&+B_{6n-5}(N-6n-6s-1,s-1)+B_{6n-5}(N-6n-6s+2,s-2)+\\
&+B_{6n-4}(N-6n-6s-2,s-1)+B_{6n-4}(N-6n-6s+2,s-2)
\end{aligned}
\right\} \qquad (3,10)
$$

Nach Zusammenfassung bei Berücksichtigung von (3,4) ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{6n-10} B_m(N-6n-6s+6,s-4)+\sum_{m=0}^{6n-10} B_m(N-6n-6s+10,s-5)+\\
&+\sum_{m=0}^{6n-8} B_m(N-6n-6s+5,s-3)+\sum_{m=0}^{6n-8} B_m(N-6n-6s+9,s-4)+\\
&+\sum_{m=0}^{6n-7} B_m(N-6n-6s+3,s-2)+\sum_{m=0}^{6n-7} B_m(N-6n-6s+4,s-3)+\\
&+\sum_{m=0}^{6n-7} B_m(N-6n-6s+7,s-3)+\sum_{m=0}^{6n-7} B_m(N-6n-6s+8,s-4)+\\
&+\sum_{m=0}^{6n-7} B_m(N-6n-6s,s-2)+\sum_{m=0}^{6n-7} B_m(N-6n-6s+1,s-3)+\\
&+\sum_{m=0}^{6n-7} B_m(N-6n-6s+4,s-3)+\sum_{m=0}^{6n-7} B_m(N-6n-6s+5,s-4)+
\end{aligned}
\qquad (3,11)
$$

$$+\sum_{m=o}^{6n-6} B_m(N-6n-6s-1,s-2)+\sum_{m=o}^{6n-6} B_m(N-6n-6s+3,s-3)+$$

$$+\sum_{m=o}^{6n-4} B_m(N-6n-6s-2,s-1)+\sum_{m=o}^{6n-4} B_m(N-6n-6s+2,s-2)=$$

$$= B_{6n-3}(N-6s+3,s-2)+B_{6n-3}(N-6s+7,s-3)+B_{6n-2}(N-6s+3,s-2)+ \tag{3,11}$$

$$+B_{6n-2}(N-6s+7,s-3)+B_{6n-1}(N-6s+2,s-1)+B_{6n-1}(N-6s+3,s-2)+$$

$$+B_{6n-1}(N-6s+6,s-2)+B_{6n-1}(N-6s+7,s-3)+B_{6n}(N-6s,s)+$$

$$+B_{6n}(N-6s+1,s-1)+B_{6n}(N-6s+4,s-1)+B_{6n}(N-6s+5,s-2)+$$

$$+B_{6n+1}(N-6s,s)+B_{6n+1}(N-6s+4,s-1)+B_{6n+2}(N-6s,s)+B_{6n+2}(N-6s+4,s-1)$$

Damit ist Satz (3,4) durch vollständige Induktion bewiesen. Auf Grund der erhaltenen Ergebnisse kann die Identität (3,5) abgewandelt werden.

$$\sum_{m=o}^{6n+3} B_m(N,s) = \sum_{m=o}^{6n-4} B_m(N-6s,s) + \sum_{m=o}^{6n-4} B_m(N-6s+4,s-1) + \tag{3,12}$$

$$+\sum_{m=o}^{6n-7} B_m(N-6s+2,s-1)+\sum_{m=o}^{6n-6} B_m(N-6s+1,s-1)+\sum_{m=o}^{6n-7} B_m(N-6s+3,s-2)+$$

$$+\sum_{m=o}^{6n-6} B_m(N-6s+5,s-2)+\sum_{m=o}^{6n-7} B_m(N-6s+6,s-2)+\sum_{m=o}^{6n-7} B_m(N-6s+7,s-3)$$

Satz (3,5):

$$B_{6n+4}(N+3,s+1) + B_{6n+4}(N,s) = \tag{3,13}$$

$$= \Big[B_{6n-6}(N-6s+3,s-2)+B_{6n-6}(N-6s+2,s-1)+B_{6n-6}(N-6s,s-1) +$$

$$
\begin{aligned}
&+ B_{6n-6}(N-6s-1,s)+B_{6n-5}(N-6s+2,s-1)+B_{6n-5}(N-6s,s-1) \;+\\
&+ B_{6n-5}(N-6s-1,s)+B_{6n-5}(N-6s-2,s)+B_{6n-4}(N-6s+2,s-1) \;+\\
&+ B_{6n-4}(N-6s,s-1)+B_{6n-4}(N-6s-1,s)+B_{6n-4}(N-6s-2,s) \quad + \qquad (3,13)\\
&+ B_{6n-3}(N-6s-1,s)+B_{6n-3}(N-6s-3,s+1)+B_{6n-2}(N-6s-1,s) \;+\\
&+ B_{6n-2}(N-6s-3,s+1)
\end{aligned}
$$

Beweis: (vollständige Induktion)
Für die Werte n=o und 1 ist die Identität erfüllt. Nach den Formeln (3,4) gilt

$$
\begin{aligned}
B_{6n+10}(N+3,s+1)+B_{6n+10}(N,s) &= \sum_{m=o}^{6n+4} B_m(N-6n-7,s)+\sum_{m=o}^{6n+4} B_m(N-6n-10,s-1)\\
&= \sum_{m=o}^{6n+3} B_m(N-6n-7,s)+\sum_{m=o}^{6n+3} B_m(N-6n-10,s-1) \;+ \qquad (3,14)\\
&+ \left[B_{6n+4}(N-6n-7,s)+B_{6n+4}(N-6n-10,s-1)\right]
\end{aligned}
$$

Um die Schreibweise für die folgenden Betrachtungen zu vereinfachen, wird eine Symbolik eingeführt.

Es bedeutet

$$
\sum_{o}^{6n-1}(-1,s-2) = \sum_{m=o}^{6n-1} B_m(N-6s-6n-1,s-2) \qquad (3,15)
$$

$$
\sum_{o}^{6n-1}\left\{(-1,s-2);\ (2,s-3)\right\} = \sum_{m=o}^{6n-1} B_m(N-6s-6n-1,s-2)+B_m(N-6s-6n+2,s-3)
$$

$$B_{6n-1}\left\{(1,s);(2,s-1)\right\} = B_{6n-1}(N-6s-6n+1,s)+B_{6n-1}(N-6s-6n+2,s-1) \tag{3,15}$$

Wird auf den Ausdruck (3,14) die Formel (3,12) angewandt und werden die beiden additiven Terme nach (3,13) behandelt, so resultiert

$$\begin{aligned}
&\sum_{0}^{6n-4}(-7,s)+\sum_{0}^{6n-4}(-3,s-1)+\sum_{0}^{6n-7}(-5,s-1)+\sum_{0}^{6n-6}(-6,s-1)+\\
&+\sum_{0}^{6n-7}(-4,s-2)+\sum_{0}^{6n-6}(-2,s-2)+\sum_{0}^{6n-7}(-1,s-2)+\sum_{0}^{6n-7}(0,s-3)+\\
&+\sum_{0}^{6n-4}(-4,s-1)+\sum_{0}^{6n-4}(0,s-2)+\sum_{0}^{6n-7}(-2,s-2)+\sum_{0}^{6n-6}(-3,s-2)+\\
&+\sum_{0}^{6n-7}(-1,s-3)+\sum_{0}^{6n-6}(1,s-3)+\sum_{0}^{6n-7}(2,s-3)+\sum_{0}^{6n-7}(3,s-4)\\
&+\Big[B_{6n-6}\left\{(-1,s-3);(-2,s-2);(-4,s-2);(-5,s-1)\right\}+\\
&+B_{6n-5}\left\{(-2,s-2);(-4,s-2);(-5,s-1);(-6,s-1)\right\}+\\
&+B_{6n-4}\left\{(-2,s-2);(-4,s-2);(-5,s-1);(-6,s-1)\right\}+\\
&+B_{6n-3}\left\{(-5,s-1);(-7,s)\right\}+B_{6n-2}\left\{(-5,s-1);(-7,s)\right\}\Big]
\end{aligned} \tag{3,16}$$

$$\begin{aligned}
=&\sum_{0}^{6n-7}\left\{(3,s-4);(2,s-3);(0,s-3);(-1,s-2)\right\}+\sum_{0}^{6n-6}\left\{(1,s-3);\right.\\
&\left.(-1,s-3);(-2,s-2);(-3,s-2)\right\}+\sum_{0}^{6n-4}\left\{(0,s-2);(-2,s-2);(-3,s-1);\right.\\
&\left.(-4,s-1)\right\}+\sum_{0}^{6n-4}\left\{(-4,s-2);(-6,s-1)\right\}+\sum_{0}^{6n-2}\left\{(-5,s-1);(-7,s)\right\}
\end{aligned}$$

Bei Berücksichtigung von (3,4) stellt der erhaltene Ausdruck

die rechte Seite von (3,13) dar, worin n durch n+1 ersetzt ist. Damit ist Satz (3,5) bewiesen.

Satz (3,6):

$$B_{6n+4}(N+1,s)+B_{6n+4}(N,s)+B_{6n+5}(N,s)+B_{6n+6}(N,s) =$$

$$= \Big[B_{6n-6}(N-6s+7,s-3)+B_{6n-6}(N-6s+6,s-2)+B_{6n-6}(N-6s+3,s-2) +$$

$$+ B_{6n-6}(N-6s+2,s-1)+B_{6n-6}(N-6s+4,s-2)+B_{6n-6}(N-6s+3,s-1) +$$

$$+ B_{6n-5}(N-6s+6,s-2)+B_{6n-5}(N-6s+3,s-2)+B_{6n-5}(N-6s+2,s-1) +$$

$$+ B_{6n-5}(N-6s+1,s-1)+B_{6n-5}(N-6s+2,s-1)+B_{6n-5}(N-6s+4,s-2) +$$

$$+ B_{6n-5}(N-6s+3,s-1)+B_{6n-4}(N-6s+6,s-2)+B_{6n-4}(N-6s+3,s-2) + \qquad (3,17)$$

$$+ B_{6n-4}(N-6s+2,s-1)+B_{6n-4}(N-6s+1,s-1)+B_{6n-4}(N-6s+2,s-1) +$$

$$+ B_{6n-4}(N-6s+4,s-2)+B_{6n-4}(N-6s+3,s-1)+B_{6n-3}(N-6s+2,s-1) +$$

$$+ B_{6n-3}(N-6s+1,s-1)+B_{6n-3}(N-6s,s)+B_{6n-3}(N-6s+3,s-1) +$$

$$+ B_{6n-3}(N-6s+1,s)+B_{6n-2}(N-6s+2,s-1)+B_{6n-2}(N-6s+1,s-1) +$$

$$+ B_{6n-2}(N-6s,s)+B_{6n-2}(N-6s+3,s-1)+B_{6n-2}(N-6s+1,s) +$$

$$+ B_{6n-1}(N-6s+1,s-1)+B_{6n-1}(N-6s,s)\Big]$$

Beweis: (vollständige Induktion)
Für die Werte n=o und n=1 kann die Identität nachgewiesen werden. Es gilt die Formel (3,17) für sämtliche möglichen Werte von N und s .Diese Anzahl, für die die Identität (3,17)

nicht identisch verschwindet, ist natürlich für die beiden Werte n=o und n=1 beschränkt.

Erneut werden die Partitionsfunktionen linkerhand von (3,17) nach den Beziehungen (3,4) umgeformt. Dabei wird die folgende Relation berücksichtigt

$$B_{6n+6}(N,s) = B_{6n+5}(N-1,s-1) \qquad (3,18)$$

Daher gilt

$$B_{6n+10}(N+1,s)+B_{6n+10}(N,s)+B_{6n+11}(N,s)+B_{6n+12}(N,s) =$$

$$= \sum_{m=o}^{6n+4} B_m(N-6n-9,s-1)+ \sum_{m=o}^{6n+4} B_m(N-6n-10,s-1)+ \sum_{m=o}^{6n+5} B_m(N-6n-11,s-1) +$$

$$+ \sum_{m=o}^{6n+5} B_m(N-6n-12,s-2)= \sum_{m=o}^{6n+3} \Big[(B_m(N-6n-9,s-1)+B_m(N-6n-10,s-1) \quad +$$

$$+ B_m(N-6n-11,s-1)+B_m(N-6n-12,s-2)\Big] + \Big\{B_{6n+4}(N-6n-9,s-1) \quad +$$

$$+ B_{6n+4}(N-6n-12,s-2)+B_{6n+4}(N-6n-10,s-1)+B_{6n+4}(N-6n-11,s-1) \quad +$$

$$+ B_{6n+5}(N-6n-11,s-1)+B_{6n+6}(N-6n-11,s-1)\Big\} \qquad (3,19)$$

Die Summen werden nach (3,12) umgeformt und auf die ersten zwei Terme der geschweiften Klammer wird Satz (3,5) angewandt. Die letzten vier Summanden werden entsprechend der Induktionsannahme (3,17), die bis n hin erfüllt ist, ersetzt. Daraus ergibt sich ein Ausdruck der Gestalt.

$$= \sum_{o}^{6n-4} (-3,s-1)+ \sum_{o}^{6n-4} (1,s-2)+ \sum_{o}^{6n-7} (-1,s-2)+ \sum_{o}^{6n-7} (-2,s-2)+ \sum_{o}^{6n-7} (0,s-3) +$$

$$+\sum_{o}^{6n-6}(2,s-3)+\sum_{o}^{6n-7}(3,s-3)+\sum_{o}^{6n-7}(4,s-4)+\sum_{o}^{6n-4}(0,s-2)+\sum_{o}^{6n-4}(4,s-3)+$$

$$+\sum_{o}^{6n-7}(2,s-3)+\sum_{o}^{6n-6}(1,s-3)+\sum_{o}^{6n-7}(3,s-4)+\sum_{o}^{6n-6}(5,s-4)+\sum_{o}^{6n-7}(6,s-4)+$$

$$+\sum_{o}^{6n-7}(7,s-5)+\sum_{o}^{6n-4}(-4,s-1)+\sum_{o}^{6n-4}(0,s-2)+\sum_{o}^{6n-7}(-2,s-2)+\sum_{o}^{6n-6}(-3,s-2)+$$

$$+\sum_{o}^{6n-7}(-1,s-3)+\sum_{o}^{6n-6}(1,s-3)+\sum_{o}^{6n-7}(2,s-3)+\sum_{o}^{6n-7}(3,s-4)+\sum_{o}^{6n-4}(-5,s-1)+$$

$$+\sum_{o}^{6n-4}(-1,s-2)+\sum_{o}^{6n-7}(-3,s-2)+\sum_{o}^{6n-6}(-4,s-2)+\sum_{o}^{6n-7}(-2,s-3)+\sum_{o}^{6n-6}(0,s-3)+$$

$$+\sum_{o}^{6n-7}(1,s-3)+\sum_{o}^{6n-7}(2,s-4)+ \qquad (3,20)$$

$$+\Big\{B_{6n-6}\{(3,s-4);(2,s-3);(0,s-3);(-1,s-2)\}+B_{6n-5}\{(2,s-3);(0,s-3)$$

$$(-1,s-2);(-2,s-2)\}+B_{6n-4}\{(2,s-3);(0,s-3);(-1,s-2);(-2,s-2)\}+$$

$$+B_{6n-3}\{(-1,s-2);(-3,s-1)\}+B_{6n-2}\{(-1,s-2);(-3,s-1)\}+$$

$$+B_{6n-6}\{(2,s-4);(1,s-3);(-2,s-3);(-3,s-2);(-1,s-3);(-2,s-2)\}+$$

$$+B_{6n-5}\{(1,s-3);(-2,s-3);(-3,s-2);(-4,s-2);(-3,s-2);(-1,s-3);$$

$$(-2,s-2)\}+B_{6n-4}\{(1,s-3);(-2,s-3);(-3,s-2);(-4,s-2);(-3,s-2);$$

$$(-1,s-3);(-2,s-2)\}+B_{6n-3}\{(-3,s-2);(-4,s-2);(-5,s-1);(-2,s-2);$$

$$(-4,s-1)\}+B_{6n-2}\{(-3,s-2);(-4,s-2);(-5,s-1);(-2,s-2);(-4,s-1)\}+$$

$$+B_{6n-1}\{(-4,s-2);(-5,s-1)\}\Big\}=$$

$$= \sum_{o}^{6n-7} \left\{(7,s-5);(6,s-4);(3,s-4);(2,s-3);(4,s-4);(3,s-3)\right\} +$$

$$+ \sum_{o}^{6n-6} \left\{(5,s-4);(2,s-4);(1,s-3);(0,s-3);(1,s-3);(3,s-4);(2,s-3)\right\}$$

$$+ \sum_{o}^{6n-4} \left\{(4,s-3);(1,s-3);(0,s-2);(-1,s-2);(0,s-2);(2,s-3);(1,s-2)\right\}$$

$$+ \sum_{o}^{6n-4} \left\{(-1,s-3);(-2,s-3);(-3,s-2);(0,s-3);(-2,s-2)\right\} +$$

$$+ \sum_{o}^{6n-2} \left\{(-2,s-2);(-3,s-2);(-4,s-1):(-1,s-2):(-3,s-1)\right\} +$$

$$+ \sum_{o}^{6n-1} \left\{(-4,s-2);(-5,s-1)\right\}$$

Die zuletzt erhaltenen Ausdrücke sind identisch mit den Elementen von (3,17), falls statt n die Zahl (n+1) gesetzt wird. Damit ist Satz (3,6) bewiesen.

Schließlich wird ein letzter Satz nachgewiesen, der sich auf die vorangehenden Sätze stützt.

Satz (3,7):

(3,21)

$$B_{6n+4}(N,s)+B_{6n+5}(N,s)+B_{6n+6}(N,s)+B_{6n+7}(N,s) =$$

$$= \Big[B_{6n-6}(N-6s+2,s-1)+B_{6n-6}(N-6s+3,s-2)+B_{6n-6}(N-6s+6,s-2) +$$

$$+ B_{6n-6}(N-6s+7,s-3)+B_{6n-5}(N-6s+1,s-1)+B_{6n-5}(N-6s+2,s-1) +$$

$$+ B_{6n-5}(N-6s+3,s-2)+B_{6n-5}(N-6s+5,s-2)+B_{6n-5}(N-6s+6,s-2) +$$

$$+ B_{6n-5}(N-6s+7,s-3)+B_{6n-4}(N-6s+1,s-1)+B_{6n-4}(N-6s+2,s-1) +$$

$$+ B_{6n-4}(N-6s+3,s-2)+B_{6n-4}(N-6s+5,s-2)+B_{6n-4}(N-6s+6,s-2) +$$

$$+ B_{6n-4}(N-6s+7,s-3)+B_{6n-3}(N-6s,s)+B_{6n-3}(N-6s+1,s-1) +$$

$$+ B_{6n-3}(N-6s+2,s-1)+B_{6n-3}(N-6s+4,s-1)+B_{6n-3}(N-6s+5,s-2) +$$

$$+ B_{6n-3}(N-6s+6,s-2)+B_{6n-2}(N-6s,s)+B_{6n-2}(N-6s+1,s-1) + \quad (3,21)$$

$$+ B_{6n-2}(N-6s+2,s-1)+B_{6n-2}(N-6s+4,s-1)+B_{6n-2}(N-6s+5,s-2) +$$

$$+ B_{6n-2}(N-6s+6,s-2)+B_{6n-1}(N-6s,s)+B_{6n-1}(N-6s+1,s-1) +$$

$$+ B_{6n-1}(N-6s+4,s-1)+B_{6n-1}(N-6s+5,s-2)\Big]$$

Beweis: (vollständige Induktion)
Für die Werte n=o und n=1 ist die Identität elementar zu bestätigen. Unter Berücksichtigung von (3,4) kann (3,21) wie folgt formuliert werden.

$$B_{6n+10}(N,s)+B_{6n+11}(N,s)+B_{6n+12}(N,s)+B_{6n+13}(N,s) =$$

$$=\sum_{m=o}^{6n+4} B_m(N-6n-10,s-1)+\sum_{m=o}^{6n+5} B_m(N-6n-11,s-1)+\sum_{m=o}^{6n+5} B_m(N-6n-12,s-2) +$$

$$+\sum_{m=o}^{6n+6} B_m(N-6n-13,s-2)=\sum_{m=o}^{6n+3}\Big[B_m(N-6n-10,s-1)+B_m(N-6n-11,s-1) + \quad (3,22)$$

$$+ B_m(N-6n-12,s-2)+B_m(N-6n-13,s-2)\Big] + \Big\{B_{6n+4}(N-6n-10,s-1) +$$

$$+ B_{6n+4}(N-6n-11,s-1)+B_{6n+5}(N-6n-11,s-1)+B_{6n+6}(N-6n-11,s-1) +$$

$$+ B_{6n+4}(N-6n-12,s-2)+B_{6n+4}(N-6n-13,s-2)+B_{6n+5}(N-6n-13,s-2) +$$

$$+ B_{6n+6}(N-6n-13,s-2)\Big\}$$

Dabei werde die Identität (3,18) angewandt. Die Summen aus (3,22) werden nach (3,12) umgeformt und die Summanden der geschweiften Klammer werden nach Satz (3,6) ersetzt.

Daraus resultiert für (3,22)

$$\begin{aligned}
&\sum_{o}^{6n-4}(-4,s-1)+\sum_{o}^{6n-4}(0,s-2)+\sum_{o}^{6n-7}(-2,s-2)+\sum_{o}^{6n-6}(-3,s-2)+\\
&+\sum_{o}^{6n-7}(-1,s-3)+\sum_{o}^{6n-6}(1,s-3)+\sum_{o}^{6n-7}(2,s-3)+\sum_{o}^{6n-7}(3,s-4)+\\
&+\sum_{o}^{6n-4}(-5,s-1)+\sum_{o}^{6n-4}(-1,s-2)+\sum_{o}^{6n-7}(-3,s-2)+\sum_{o}^{6n-6}(-4,s-2)+\\
&+\sum_{o}^{6n-7}(-2,s-3)+\sum_{o}^{6n-7}(0,s-3)+\sum_{o}^{6n-7}(1,s-3)+\sum_{o}^{6n-7}(2,s-4)+\\
&+\sum_{o}^{6n-4}(0,s-2)+\sum_{o}^{6n-4}(4,s-3)+\sum_{o}^{6n-7}(2,s-3)+\sum_{o}^{6n-6}(1,s-3)+\\
&+\sum_{o}^{6n-7}(3,s-4)+\sum_{o}^{6n-6}(5,s-4)+\sum_{o}^{6n-7}(6,s-4)+\sum_{o}^{6n-7}(7,s-5)+\\
&+\sum_{o}^{6n-4}(-1,s-2)+\sum_{o}^{6n-4}(3,s-3)+\sum_{o}^{6n-7}(1,s-3)+\sum_{o}^{6n-6}(0,s-3)+\\
&+\sum_{o}^{6n-7}(2,s-4)+\sum_{o}^{6n-6}(4,s-4)+\sum_{o}^{6n-7}(5,s-4)+\sum_{o}^{6n-7}(6,s-5)+
\end{aligned} \tag{3,23}$$

$$+\Big\{B_{6n-6}\Big\{(2,s-4);(1,s-3);(-2,s-3);(-3,s-2);(-1,s-3);(-2,s-2)\Big\}+$$

$$+B_{6n-5}\Big\{(1,s-3);(-2,s-3);(-3,s-2);(-4,s-2);(-3,s-2);(-1,s-3);$$

$$(-2,s-2)\Big\}+B_{6n-4}\Big\{(1,s-3);(-2,s-3);(-3,s-2):(-4,s-2);(-3,s-2);$$

$$(-1,s-3);(-2,s-2)\Big\} + B_{6n-3}\Big\{(-3,s-2);(-4,s-2);(-5,s-1);(-2,s-2);$$

$$(-4,s-1)\Big\} + B_{6n-2}\Big\{(-3,s-2);(-4,s-2);(-5,s-1);(-2,s-2);(-4,s-1)\Big\}$$

$$+ B_{6n-2}\Big\{(-3,s-2);(-4,s-2);(-5,s-1);(-2,s-2);(-4,s-1)\Big\} +$$

$$+ B_{6n-1}\Big\{(-4,s-2);(-5,s-1)\Big\} + B_{6n-6}\Big\{(6,s-5):(5,s-4);(2,s-4);$$

$$(1,s-3);(3,s-4):(2,s-3)\Big\} + B_{6n-5}\Big\{(5,s-4);(2,s-4);(1,s-3);$$

$$(0,s-3);(1,s-3);(3,s-4);(2,s-3)\Big\} + B_{6n-4}\Big\{(5,s-4):(2,s-4);$$

$$(1,s-3);(0,s-3);(1,s-3);(3,s-4);(2,s-3)\Big\} + B_{6n-3}\Big\{(1,s-3);$$

$$(0,s-3);(-1,s-2);(2,s-3):(0,s-2)\Big\} + B_{6n-2}\Big\{(1,s-3);(0,s-3);$$

$$(-1,s-2);(2,s-3);(0,s-2)\Big\} + B_{6n-1}\Big\{(0,s-3);(-1,s-2)\Big\}\Big\} =$$

$$= \sum_{0}^{6n-7}\Big\{(2,s-3);(3,s-4);(6,s-4);(7,s-5)\Big\} + \sum_{0}^{6n-6}\Big\{(0,s-3);(1,s-3);$$

$$(2,s-4);(4,s-4);(5,s-4);(6,s-5)\Big\} + \sum_{0}^{6n-4}\Big\{(-1,s-2);(0,s-2);$$

$$(1,s-3);(3,s-3);(4,s-3);(5,s-4)\Big\} + \sum_{0}^{6n-4}\Big\{(-3,s-2);(-2,s-3);$$

$$(-1,s-3);(1,s-3);(2,s-4);(3,s-4)\Big\} + \sum_{0}^{6n-2}\Big\{(-4,s-1);(-3,s-2);$$

$$(-2,s-2);(0,s-2);(1,s-3);(2,s-3)\Big\} + \sum_{0}^{6n-1}\Big\{(-5,s-1);(-4,s-2);$$

$$(-1,s-2);(0,s-3)\Big\}$$

Das Ergebnis der Rechnung (3,23) ist nach (3,4) identisch mit der rechten Seite von (3,21), falls dort n durch die Zahl $(n+1)$ ersetzt wird. Damit ist Satz (3,7) bewiesen.

Das Ziel der gesamten bisherigen Untersuchung ist es, die Identität (3,5) allgemein nachzuweisen. Die Induktionsannahme lautet, (3,5) sei bis n erfüllt. Dann gelang es zunächst Satz (3,4) zu beweisen und es konnte (3,5) auf die Gestalt (3,12) gebracht werden. Mit Hilfe der letztgenannten Identität konnte Satz (3,5) gezeigt werden. Dieser Satz und die Formeln (3,12) und (3,18) führten zum Beweis für Satz (3,6). Die Ergebnisse dieses Satzes kombiniert mit (3,12) ergaben schließlich Satz (3,7). Insgesamt haben also die Induktionsannahme und die Eigenschaften der Zerfällungsfunktion $B_m(N,s)$ (3,4) zu Satz (3,7) geführt. Werden die durch Satz (3,7) erklärten Partitionsfunktionen zur Identität (3,12) angefügt, so ergibt sich

$$\sum_{m=0}^{6n+7} B_m(N,s) = \sum_{m=0}^{6n-1} B_m(N-6s,s) + \sum_{m=0}^{6n-1} B_m(N-6s+4,s-1) + \tag{3,24}$$

$$+ \sum_{m=0}^{6n-2} B_m(N-6s+2,s-1) + \sum_{m=0}^{6n-1} B_m(N-6s+1,s-1) + \sum_{m=0}^{6n-4} B_m(N-6s+3,s-2) +$$

$$+ \sum_{m=0}^{6n-1} B_m(N-6s+5,s-2) + \sum_{m=0}^{6n-2} B_m(N-6s+6,s-2) + \sum_{m=0}^{6n-4} B_m(N-6s+7,s-3)$$

Daher ist die rekursive Beziehung (3,5) allgemein gezeigt.

Elementar kann gezeigt werden, falls M eine Zahl aus der Restklasse $1 \pmod 6$ ist, die an nächster Stelle oberhalb N liegt oder höchstens gleich N ist, so gilt

$$B(N,s) = \sum_{m=0}^{M} B_m(N,s); B(N-6s,s) = \sum_{m=0}^{M-8} B_m(N-6s,s) \tag{3,25}$$

$$B(N-6s+4,s-1) = \sum_{m=0}^{M-8} B_m(N-6s+4,s-1); B(N-6s+2,s-1) = \sum_{m=0}^{M-9} B_m(N-6s+2,s-1)$$

$$B(N-6s+1,s-1)=\sum_{m=o}^{M-8} B_m(N-6s+1,s-1);B(N-6s+3,s-2)=\sum_{m=o}^{M-11} B_m(N-6s+3,s-2)$$

$$B(N-6s+5,s-2)=\sum_{m=o}^{M-8} B_m(N-6s+5,s-2);B(N-6s+6,s-2)=\sum_{m=o}^{M-9} B_m(N-6s+6,s-2)$$

$$B(N-6s+7,s-3)=\sum_{m=o}^{M-11} B_m(N-6s+7,s-3) \qquad (3,25)$$

Damit ist gleichzeitig die Rekursionsformel für die Funktionen $B(n,s)$ in (3,3) bewiesen.

Beweis von Satz (3,3): Zu zeigen ist die Identität

$$A(n,s) = B(n,s) \qquad (3,26)$$

Der Beweis dieser Behauptung gelingt mittels vollständiger Induktion. Es sei angenommen, die Formel (3,26) sei gültig für die Summandenzahl $s \leq s_n$ und für beliebige Werte von N. Ferner gelte sie für die Summandenzahl s_n+1 nur für die Werte $N \leq N_n$. Wird als bekannt vorausgesetzt, daß die beiden Partitionsfunktionen $A(n,s)$ und $B(n,s)$ die gleichen Rekursionsformeln (3,2); (3,3) befolgen, so gilt unter der gemachten Annahme

$$A(N_n+1,s_n+1) = B(N_n+1,s_n+1) \qquad (3,27)$$

Durch Fortsetzung dieser Schlußweise ergibt sich, daß für s_n+1 Summanden und beliebige Werte von N die Gleichheit der beiden Partitionsfunktionen gilt. Folgende Beziehung ist elementar.

$$A(1,s_n+2) = B(1,s_n+2) \qquad (3,28)$$

Daher kann der für die Summandenzahl s_n+1 durchgeführte Gedankengang wiederholt werden, sodaß die Identität (3,26) schließlich für alle Werte von N und s gültig ist. Die Gleichung (3,26) ist für $s=1$ und beliebige Werte von N, sowie für $s=2$ und $N=1$ erfüllt. Damit sind die Anfangsbedingungen der

durchgeführten Schlußweise gegeben und der Beweis von Satz (3,3) abgeschlossen.

Bei dem durchgeführten Beweis ist es wesentlich, daß Satz (3,2) die Verallgemeinerung, die in Satz (3,3) zum Ausdruck kommt, zuläßt. Lediglich auf diesem Wege, über die Unterteilung der Partitionen nach ihrer Summandenzahl, kann ein Beweis gegeben werden. Aus dem Umfang der gemachten Ausführungen ist zu ermessen, um wieviel größerer Anstrengungen es für weitergehende Partitionsbeziehungen bedarf. Es ist möglich, parallel zu den in Paragraph 2 angestellten Untersuchungen, die erhaltenen Zerfällungsrelationen zu verallgemeinern. Damit ist eine Überleitung zum nächsten Abschnitt gegeben.

Verallgemeinerungen

In den in der Einleitung zusammengestellten bisherigen Ergebnissen wurden die Arbeiten von Schur [7] und Gleißberg [8] erwähnt, in denen Partitionsbeziehungen mit der Differenzenbedingung drei auf Partitionsaussagen mit beliebiger Differenz von aufeinanderfolgenden Summanden ausgedehnt werden konnten. Ähnliche Verallgemeinerungen lassen die zuletzt bewiesenen Partitionsrelationen zu.

Satz (3,8): Die Anzahl von Partitionen einer natürlichen Zahl n in verschiedene Summanden aus den Restklassen $r, r+2, r+3 \pmod{r+4}$ mit $r \geq 2$ ist gleich der Anzahl Partitionen dieser Zahl n in Summanden mit der Mindestdifferenz $(r+4)$, wobei lediglich die Summanden aus den Restklassen $r, r+2, r+3, 2r+2, 2r+3, 2r+5 \pmod{r+4}$ zugelassen sind und keine benachbarten Summanden aus den Restklassen $2r+2, 2r+3, 2r+5 \pmod{r+4}$ auftreten.

Ist $A(n,s)$, die an erster Stelle genannte Zerfällungsfunktion, die Zahl Zerfällungen von n in s Summanden mit den genannten Eigenschaften und $B(n,s)$ die Zerfällungsfunktion der Zer-

legungen mit Differenzenbedingungen in s Summanden, wobei die Summanden aus den Restklassen 2r+2, 2r+3 und 2r+5 (mod r+4) als zwei Summanden zu zählen sind, so lautet die Erweiterung von Satz (3,8)

Satz (3,9):

$$A(n,s) = B(n,s) \tag{3,29}$$

Beweis: Die Anzahlfunktion A(n,s) befolgt in Analogie zu (3,2) die rekursive Beziehung

$$\begin{aligned} A(N,s) &= A(N-(r+4)s,s) + A(N-(r+4)s+4,s-1) + \\ &+ A(N-(r+4)s+2,s-1) + A(N-(r+4)s+1,s-1) + A(N-(r+4)s+3,s-2) + \\ &+ A(N-(r+4)s+5,s-2) + A(N-(r+4)s+6,s-2) + A(N-(r+4)s+7,s-3) \end{aligned} \tag{3,30}$$

Die zweite in Satz (3,8) angeführte Zerfällungsfunktion B(n,s) wird in bestimmter Weise unterteilt. Im Gegensatz zu früheren Ausführungen wird beispielsweise mit $B_{6n+2}(N,s)$ die Anzahl Zerfällungen der Form B(N,s) bezeichnet, wobei (r+4)n+r der größte Summand ist. Falls die in (3,4) gebrauchte Schreibweise durch $\{\ \}$ angedeutet wird, gilt

$$\begin{aligned} &B_{6n+1}(N,s) = \left\{B_{(r+4)n+r-1}(N,s)\right\} \ ; \ B_{6n+2}(N,s) = \left\{B_{(r+4)n+r}(N,s)\right\} \\ &B_{6n+3}(N,s) = \left\{B_{(r+4)n+r+1}(N,s)\right\} \ ; \ B_{6n+4}(N,s) = \left\{B_{(r+4)n+r+2}(N,s)\right\} \\ &B_{6n+5}(N,s) = \left\{B_{(r+4)n+r+3}(N,s)\right\} \ ; \ B_{6n+6}(N,s) = \left\{B_{(r+4)n+2r+2}(N,s)\right\} \end{aligned} \tag{3,31}$$

Daher lauten die Formeln (3,4) jetzt

$$B_{6n+1}(N,s) = \sum_{m=0}^{6n-6} B_m(N-(r+4)n-(r-1),s-2) \tag{3,32}$$

$$B_{6n+2}(N,s) = \sum_{m=o}^{6n-4} B_m(N-(r+4)n-r,s-1)$$

$$B_{6n+3}(N,s) = \sum_{m=o}^{6n-4} B_m(N-(r+4)n-(r+1),s-2)$$

$$B_{6n+4}(N,s) = \sum_{m=o}^{6n-2} B_m(N-(r+4)n-(r+2),s-1) \qquad (3,32)$$

$$B_{6n+5}(N,s) = \sum_{m=o}^{6n-1} B_m(N-(r+4)n-(r+3),s-1)$$

$$B_{6n+6}(N,s) = \sum_{m=o}^{6n-1} B_m(N-(r+4)n-(2r+2),s-2)$$

Es gelten die beiden Beziehungen

$$B_{6n+2}(N-1,s-1) = B_{6n+3}(N,s) \qquad (3,33)$$

und

$$B_{6n+5}(N-r+1,s-1)=B_{6n+6}(N,s) \qquad (3,34)$$

Unter Zuhilfenahme dieser Relationen ist es einfach, den zu (3,7) äquivalenten Satz für die neu erklärten Funktionen $B_m(N,s)$ herzuleiten. Es sind lediglich im Argument der in der Rekursionsformel angeführten Partitionsfunktionen die Zahlen 6s allgemein durch (r+4)s zu ersetzen. Der unter Satz (3,5) zum Ausdruck gebrachte Sachverhalt erfährt bei seiner Verallgemeinerung eine geringfügige Änderung. Er lautet:

Satz (3,10):

$$B_{6n+4}(N+r+1,s+1)+B_{6n+4}(N,s) =$$

$$= \left[B_{6n-6}(N-(r+4)s+3,s-2)+B_{6n-6}(N-(r+4)s+2,s-1) + \right.$$

$$+ B_{6n-6}(N-(r+4)s+4,s-1)+B_{6n-6}(N-(r+4)s-1,s) \quad +$$

$$+ B_{6n-5}(N-(r+4)s+2,s-1)+B_{6n-5}(N-(r+4)s,s-1) \quad +$$

$$+ B_{6n-5}(N-(r+4)s-1,s) \quad +B_{6n-5}(N-(r+4)s-2,s) \quad +$$

$$+ B_{6n-4}(N-(r+4)s+2,s-1)+B_{6n-4}(N-(r+4)s,s-1) \quad + \qquad (3,35)$$

$$+ B_{6n-4}(N-(r+4)s-1,s) \quad +B_{6n-4}(N-(r+4)s-2,s) \quad +$$

$$+ B_{6n-3}(N-(r+4)s-1,s) \quad +B_{6n-3}(N-(r+4)s-3,s+1) \quad +$$

$$+ B_{6n-2}(N-(r+4)s-1,s) \quad +B_{6n-2}(N-(r+4)s-3,s+1)\Big]$$

Der Beweis dieses Satzes verläuft völlig analog zu dem von Satz (3,5) und wird daher nicht näher ausgeführt. Die Sätze (3,6) und (3,7) können ebenso übernommen werden, falls die oben angeführte Substitution für die Zahl $6s$ vorgenommen wird. Mit diesem Ergebnis können sämtliche, für den Fall $r=2$ gezogenen Schlußfolgerungen wiederholt werden. Der Beweis der Sätze (3,8) und (3,9) ist damit erfolgt.

Ohne Beweis werden zwei weitere Verallgemeinerungen angegeben. Erstens können die in Satz (3,8) dargebrachten Zusammenhänge durch folgenden Satz in interessanter Weise ergänzt werden.

Satz (3,11): Die Anzahl von Partitionen einer natürlichen Zahl n in verschiedene Summanden aus den Restklassen 2, $r+2$, $r+3$ (mod $r+4$) mit $r\geq 2$ ist gleich der Anzahl Partitionen dieser Zahl n in Summanden mit der Mindestdifferenz $(r+4)$, wobei lediglich die Summanden aus den Restklassen 2, $r+2$, $r+3$, $r+4$, $r+5$, $2r+5$ (mod $r+4$) zugelassen sind und keine benachbarten Summanden aus den Restklassen $r+4$,

$r+5,\ 2r+5 \pmod{r+4}$ auftreten.

Der Beweis kann mittels der gleichen, für Satz (3,8) in Anspruch genommenen Methode geführt werden. Für $r=2$ besagen die beiden Sätze (3,8) und (3,11) das Gleiche. Erst für $r>2$ enthält Satz (3,11) eine weitere Partitionsaussage.

Analog zu den Partitionsrelationen für Summanden aus der natürlichen Zahlenfolge (siehe Sätze (3); (4); (11); (12)) gelingt es also auch für Zerfällungen mit Summanden aus Restklassen zwei Partitionsaussagen zu entwickeln. Es soll schließlich im folgenden die zweite Verallgemeinerung der von Schur erhaltenen Ergebnisse formuliert werden.

Satz (3,12): Die Anzahl von Partitionen einer natürlichen Zahl n in verschiedene Summanden aus den Restklassen $r,\ r+1 \pmod{r+2}$ mit $(r \geq 1)$ ist gleich der Anzahl Partitionen dieser Zahl n in Summanden mit der Mindestdifferenz $(r+2)$, wobei lediglich Summanden aus den Restklassen $r,\ r+1,\ 2r+1 \pmod{r+2}$ zugelassen sind und keine benachbarten Summanden aus der Restklasse $2r+1 \pmod{r+2}$ auftreten.

§ 4

Zusammenfassung

Es sei gestattet im Anschluß an eine Arbeit von H. Ostmann [10] eine übersichtliche Zusammenstellung der bereits bekannten und der neuen Ergebnisse zu geben.

Wird mit $A_{m,n \pmod k}\ \{a_s\}$ die Zahlenmenge der Summanden aus den Restklassen $m \pmod k$ und $n \pmod k$ bezeichnet, so bedeutet $p(N,A_{m,n \pmod k})$ die Anzahl der Zerfällungen der natürlichen Zahl N in Summanden aus der beschriebenen Zahlenmenge. Die Partitionsanzahlen mit Differenzenbeziehungen werden allgemein $p'(N,B,d)$ genannt. Hierbei bedeutet N die zu zerfällende Zahl, B ist die Zahlenmenge, aus der die Summanden stammen und d ist der Betrag, um den sich in der Summe aufeinanderfolgende Zahlen unterscheiden müssen. In der Summe aufeinanderfolgende Summanden werden kurz durch $(+\ldots+ S^{(i)}+S^{(i+1)}+ \ldots)$ beschrieben. Dann gilt $(S^{(i+1)}-S^{(i)}) \geq d$. Die Menge der natürlichen Zahlen heiße Z. Damit lauten die in dieser Arbeit zusammengestellten Resultate für Partitionen mit Differenzenbedingungen

Satz (2):

$$p(N,A_{1 \pmod 2}) = p'(N,Z,1) \qquad (4,1)$$

Satz (3):

$$p(N,A_{1,4 \pmod 5}) = p'(N,Z,2) \qquad (4,2)$$

Satz (4): Bezeichne Z' die Menge der natürlichen Zahlen oberhalb 1, dann ist

$$p(N,A_{2,3\ (\mathrm{mod}\ 5)}) = p'\ (N,Z',2) \qquad (4,3)$$

Satz (5): Ist B die Menge der natürlichen Zahlenfolge, wobei gilt

$$\forall S \epsilon A_{3(\mathrm{mod}\ 3)} \epsilon B \longrightarrow (a^{(i+1)} - a^{(i)}) > 3, \text{ so folgt } *)$$

$$p(N,A_{1,5(\mathrm{mod}\ 6)}) = p'(N,B,3) \qquad (4,4)$$

Satz (9): Ist B die Menge der natürlichen Zahlenfolge, wobei gilt

$$\forall S \epsilon A_{1(\mathrm{mod}\ 2)} \epsilon B \longrightarrow (a^{(i+1)} - a^{(i)}) > 0, \text{ so folgt}$$

$$p(N,A_{0,1,3(\mathrm{mod}\ 4)}) = p'(N,B,0) \qquad (4,5)$$

Satz (11): Ist B die Menge der natürlichen Zahlenfolge, wobei gilt

$$\forall S \epsilon A_{0(\mathrm{mod}\ 2)} \epsilon B \longrightarrow (a^{(i+1)} - a^{(i)}) > 2, \text{ so folgt}$$

$$p(N,A_{1,4,7(\mathrm{mod}\ 8)}) = p'(N,B,2) \qquad (4,6)$$

Satz (12): Ist B die Menge der natürlichen Zahlenfolge oberhalb 2, wobei gilt

$$\forall S \epsilon A_{0(\mathrm{mod}\ 2)} \epsilon B \longrightarrow (a^{(i+1)} - a^{(i)}) > 2, \text{ so folgt}$$

$$p(N,A_{3,4,5(\mathrm{mod}\ 8)}) = p'(N,B,2) \qquad (4,7)$$

---

* siehe Zeichenerklärung

Satz (1,1): Ist B die Menge der natürlichen Zahlenfolge, wobei gilt

$$\forall S \epsilon A_{0(\mathrm{mod}\ 2)} \epsilon B \longrightarrow (a^{(i+1)} - a^{(i)}) > 0, \text{ so folgt}$$

$$p(N, A_{1,2,3(\mathrm{mod}\ 4)}) = p'(N,B,0) \qquad (4,8)$$

Satz (2,1): Ist B die Menge der natürlichen Zahlenfolge, wobei gilt

$$\forall S \epsilon A_{1(\mathrm{mod}\ 2)} \epsilon B \longrightarrow (a^{(i+1)} - a^{(i)}) > 2, \text{ so folgt}$$

$$p(N, A_{1,5,6(\mathrm{mod}\ 8)}) = p'(N,B,2) \qquad (4,9)$$

Satz (2,2): Ist B die Menge der natürlichen Zahlenfolge oberhalb 1, wobei gilt

$$\forall S \epsilon A_{1(\mathrm{mod}\ 2)} \epsilon B \longrightarrow (a^{(i+1)} - a^{(i)}) > 2, \text{ so folgt}$$

$$p(N, A_{2,3,7(\mathrm{mod}\ 8)}) = p'(N,B,2) \qquad (4,10)$$

Satz (3,1): Ist B die Menge der natürlichen Zahlen ohne 1 und 3, wobei gilt

$$\forall S \epsilon A_{1,3,6(\mathrm{mod}\ 6)} \epsilon B \longrightarrow (a^{(i+1)} - a^{(i)}) > 6, \text{ so folgt}$$

$$p(N, A_{2,5,11(\mathrm{mod}\ 12)}) = p'(N,B,6) \qquad (4,11)$$

Schließlich können neben den angegebenen Partitionsfunktionen noch solche erklärt werden, die die Zerfällungen einer natürlichen Zahl in verschiedene Summanden aus bestimmten Restklassen erfassen. Solche Zerfällungsfunktionen werden mit $p_v(N, A_{m,n(\mathrm{mod}\ k)})$ bezeichnet. Damit kann für Satz (2) ebenso

$p(N,A_{1(\mathrm{mod}\ 2)}) = p_v(N,A_{1(\mathrm{mod}\ 1)})$ geschrieben werden. Die von Schur angegebene Verallgemeinerung lautet

Satz (6): Ist $B=B_{0,a,b(\mathrm{mod}\ k)}$, wobei $k\geq 3$, $a<\frac{k}{2}$, $b=k-a$ und

$$\forall S\in A_{0(\mathrm{mod}\ k)}\in B \longrightarrow (a^{(i+1)}-a^{(i)}) > k, \text{ so gilt}$$

$$p_v(N,A_{a,b(\mathrm{mod}\ k)}) = p'(N,B,k) \qquad (4,12)$$

Die neuen allgemeinen Partitionsaussagen sind in den folgenden Sätzen zusammengefaßt.

Satz (2,3): Ist $B=B_{k,k+1(\mathrm{mod}\ k+1)}$, $k>0$ und

$$\forall S\in A_{k(\mathrm{mod}\ k+1)}\in B \longrightarrow (a^{(i+1)}-a^{(i)}) > (k+1), \text{ so gilt}$$

$$p_v(N,A_{k,k+1,2k+2(\mathrm{mod}\ 2k+2)}) = p'(N,B,k+1) \qquad (4,13)$$

Satz (2,4): Ist $B=B_{k+1,2k+1(\mathrm{mod}\ k+1)}$, $k>0$ und

$$\forall S\in A_{2k+1(\mathrm{mod}\ k+1)}\in B \longrightarrow (a^{(i+1)}-a^{(i)}) > (k+1), \text{ so gilt}$$

$$p_v(N,A_{k+1,2k+1,2k+2(\mathrm{mod}\ 2k+2)}) = p'(N,B,k+1) \qquad (4,14)$$

Satz (3,8): Ist $B=B_{k,k+2,k+3,2k+2,2k+3,2k+5(\mathrm{mod}\ k+4)}$, $k>1$ und

$$\forall S\in A_{2k+2,2k+3,2k+5(\mathrm{mod}\ k+4)}\in B \longrightarrow (a^{(i+1)}-a^{(i)}) > k+4,$$

so gilt

$$p_v(N,A_{k,k+2,k+3(\text{mod } k+4)}) = p'(N,B,k+4) \quad (4,15)$$

Satz (5,11): Ist $B=B_{2,k+2,k+3,k+4,k+5,2k+5(\text{mod } k+4)}, k>1$ und

$$\forall S \in A_{k+4,k+5,2k+5(\text{mod } k+4)} \in B \longrightarrow (a^{(i+1)}-a^{(i)}) > k+4$$

so gilt

$$p_v(N,A_{2,k+2,k+3(\text{mod } k+4)}) = p'(N,B,k+4) \quad (4,16)$$

Diese Entwicklungen zeigen, daß sich neue Partitionsaussagen ergeben, wenn die Summanden in den Zerfällungen verschärften Bedingungen genügen. Dieser Sachverhalt kommt besonders deutlich beim Vergleich des Satzes (5) mit Satz (3,1) zum Ausdruck.

Die approximative Behandlung von Zerfällungsfunktionen stellt ebenso einen wichtigen Zweig der Lehre von den Partitionen dar. Erstmals haben sich Hardy und Ramanujan [11] die Frage nach dem Wachstum der einfachen Partitionsfunktion p(n) vorgelegt. In der weiteren Entwicklung hat dieses Problem zu einer ganzen Reihe von neuen Resultaten auf dem Gebiet der Zahlentheorie und der Analysis geführt. Besonders sind dabei Arbeiten von Rademacher, Lehmer und Meinardus zu nennen.

In der an zweiter Stelle im Literaturverzeichnis angeführten Arbeit von Meinardus werden erstmalig allgemeine Wachstumsaussagen für Partitionsfunktionen mit Differenzenbedingungen hergeleitet. Modulfunktionen und Partitionenprobleme wurden von Petersson [16] behandelt. Es wird dabei nicht von der bei Rademacher angewandten Farey-Zerschneidung Gebrauch gemacht, sondern ein systematisches Verfahren entwickelt, das die Beziehungen der Partitionsanzahlen zu Modulfunktionen benutzt und mit der Schlußweise der algebraischen Funktionentheorie operiert.

Die Frage, wie sich die Verschärfung der arithmetischen Bedingungen für Summanden aus den Zerfällungen auf das Wachstumsverhalten der Partitionsfunktionen auswirkt, ist dagegen noch unbeantwortet geblieben. So wäre es ein interessantes Problem, welche Änderungen zum Beispiel die Erweiterung von Satz (3) zu Satz (11) oder (2,1) für das asymptotische Verhalten der Partitionsfunktionen mit sich bringt.

Zum Abschluß sei gesagt, die Lehre von den einfachen Partitionen, im besonderen von den Partitionen mit Differenzenbedingungen, hat durch die bisherigen Ergebnisse in keiner Weise zu einer gewissen Vollständigkeit geführt. Durch die Ausführungen ist ein Weg gewiesen, wie durch weitere Verschärfung der Bedingungen für die Summanden aus den Zerlegungen neue Partitionsaussagen gefunden werden können. Damit ergeben sich neue Problemstellungen für die approximativen Darstellungen von Partitionsfunktionen. Eine umfangreiche Literaturangabe ist der Arbeit am Ende beigefügt worden.

Literaturverzeichnis

[1] Euler, L. Introductio in Analysin infinitorum T. 1, cap. 16 de partitione numerorum

[2] Rogers, L.J. On two theorems of combinatory analysis and some allied identities. London Math. Soc. 2 (1917) S. 315

[3] Ramanujan, S. Collected papers, Nr. 26. (1927) S. 214

[4] Watson, G.N. A new proof of the Rogers-Ramanujan identities, Journal of the London m. S. (1929) S. 4

[5] Bailey, W.N. Generalized hypergeometric series Nr. 32 (1935) S. 69

[6] Slater, L.J. Further identities of Rogers-Ramanujan type, Proc. Lond. math. Soc. 2 (1951)S. 147

[7] Schur, I. Zur additiven Zahlentheorie Sitzungsbericht Akad. Berlin (1926) S. 488

[8] Gleißberg, W. Über einen Satz von Herrn I. Schur Math. Zeitschrift (1928) S. 372

[9] Alder, H.L. The nonexistence of certain identities in the theory of partitions and compositions Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948) S. 712
Generalizations of the Rogers-Ramanujan identities, Pacific Journ. of Math. 4 (1954) S. 161

[10] Ostmann, H.H. Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete, additive Zahlentheorie (1956) S.46

[11] Hardy/Ramanujan Asymptotic formulae in Combinatory analysis, Proc. London. math. Soc. 2,17 (1918) S. 75

[12] Meinardus, G. Asymptotische Aussagen über Partitionen Mathem. Zeitschrift 59 (1953) S. 388
Über Partitionen mit Differenzenbedingungen Math. Zeitschrift 61 (1954) S. 289

[13] Rademacher, H. On the partition function p(n)
Proc. Lond. math. Soc. 43 (1937) S. 241

[14] Lehmer, D. H. On the Hardy-Ramanujan series for the partition function. Journal Lond. math. Soc. 12 (1937) S. 171

[15] Selberg, A. Über einige arithmetische Identitäten
Avhandlinger Norske math. nat. (1935/36)

[16] Petersson, H. Über Modulfunktionen und Partitionenprobleme, Abhdlg. der dtsch. Akad. d. Wiss. Berlin Heft 2 (1954)
Über die arithmetischen Eigenschaften eines Systems multitplikativer Modulfunktionen von Primzahlstufe, Acta.math.95 (1956) S. 57

[17] Göllnitz, H. Einfache Partitonen (unveröffentlicht)
Diplomarbeit W.S. 1960, Göttingen

Zeichenerklärung: $\forall S$ für alle Summanden , $\in$ Elemente von

$\longrightarrow$, so folgt

Lebenslauf

Am 6. Juni 1935 wurde ich, Heinz Göllnitz, in Chemnitz als Sohn des Studienrates Willy Göllnitz und dessen Ehefrau Johanna, geb. Just, geboren. Nach achtjährigem Besuch der Grundschule in Chemnitz, trat ich 1949 in die Karl Marx Oberschule in Chemnitz ein und legte dort 1953 die Reifeprüfung ab.

Im Sommersemester 1953 begann ich mein Studium der Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität in Jena. Im März 1958 war ich gezwungen, mein Studium aus politischen Gründen abzubrechen. Im Sommersemester 1958 setzte ich das Studium an der Georg-August-Universität in Göttingen fort und bestand 1960 mein Diplomexamen für Mathematik.

Seit dem Jahre 1960 bin ich als wissenschaftlicher Assistent in der aeroelastischen Abteilung der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen angestellt. Im Rahmen dieser Tätigkeit habe ich im Zeitraum Herbst 1960 bis Sommer 1961 am „Training Center for experimental Aerodynamics" studiert und ein Diplom dieses Instituts erworben.

Heinz Göllnitz

Göttingen, September 1963